

早稲田大学 正員 平嶋政治
首都高速道路公団 〇正員 恵谷舜吾

1. まえがき

多角開断面の薄肉曲線部材を対象とし、部材を構成する曲板に、平面保持の仮定を適用することにより、回転変形に起因するそり関数を決定し、変位と軸方向ひずみの関係を導出したものである。

2. 棒軸の変位と任意点の変位の関係

棒軸の変位前の単位ベクトルを $\hat{e}_i$ で表わす。棒軸の変位を $\bar{w}$ ($=\bar{u}\hat{e}_1 + \bar{v}\hat{e}_2 + \bar{w}\hat{e}_3$)、又、棒軸を中心とする断面の回転角を $\bar{\psi}$ とすると、変位後の単位ベクトル e_i は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \hat{e}_1 + \bar{\psi}|_{\theta_1} \hat{e}_2 + \bar{w}|_{\theta_1} \hat{e}_3 \\ e_2 &= -\bar{\psi}|_{\theta_1} \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \bar{\psi} \hat{e}_3 \\ e_3 &= \bar{w}|_{\theta_1} \hat{e}_1 - \bar{\psi} \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \end{aligned} \right\} \text{----- (1)}$$

$$(\text{但し, } \bar{\psi}|_{\theta_1} = \bar{\psi}_{\theta_1} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \bar{\psi}^n)$$

平面保持の仮定を適用すると、(Fig-1)より

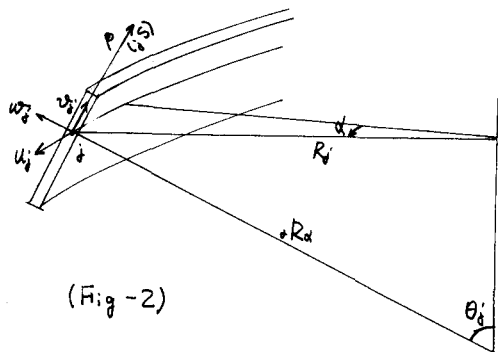
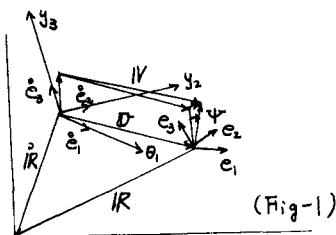
$$W(U, V, W) = \bar{w} + (e_2 - \hat{e}_2) \times y_2 + (e_3 - \hat{e}_3) \times y_3 \text{----- (2)}$$

(1)式と(2)式へ代入すると、次の棒軸の変位と、任意点の変位の関係を得る。

$$U = \bar{u} - \bar{\psi}|_{\theta_1} \times y_2 + \bar{w}|_{\theta_1} \times y_3 \text{----- (3)}$$

$$V = \bar{v} - \bar{\psi} \times y_3 \text{----- (4)}$$

$$W = \bar{w} + \bar{\psi} \times y_2 \text{----- (5)}$$



3. そり関数

1). 曲板の軸方向ひずみ; 曲板(4)の軸方向ひずみは、座標系 α -, β -, を主曲率方向に定めると次式で表わされる。

$$E_j = \frac{1}{jA} U_{j,\alpha} + \frac{jA_{,\alpha}}{jA_j B} V_j + \frac{1}{jR_{\alpha}} W_j \text{----- (6)}$$

A, B ; α のパラメーター。 R_{α} ; α -軸の主曲率。

2). 平面曲線部材のそり変位; (3)式において、 $\bar{v} = R_{\beta} \times \bar{\psi}$, $y_2 = jS$, $y_3 = 0$ とし、平面曲線においては $\bar{\psi}_{\theta_1}^2 = 0$ であることを利用すると、曲板(4)のそり変位は次式で表わされる。

$$U_j = u_j - (R_{\beta} \times jS) \bar{\psi}|_{\theta_1} = (1 - j\bar{\psi}_{\theta_1}^2) u_j - \frac{R_{\beta} \times jS}{jA_0} \bar{\psi}_{,\alpha} \text{----- (7)}$$

R_{β} ; 回転中心から曲板(4)への垂線の長さ。 $jA_0 = jA(0)$, u_j ; 中点の変位。

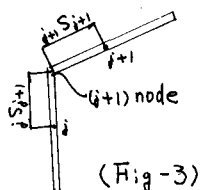
(6)式、(7)式より、そりひずみは次式である。

$$E_j = \frac{1}{jA} (1 - j\bar{\psi}_{\theta_1}^2) u_{j,\alpha} - \frac{R_{\beta} \times jS}{jA_j A_0} \bar{\psi}_{,\alpha} \text{----- (8)}$$

3) そり関数; 断面を構成する曲板間のひずみの連続条件 [$\varepsilon_j'(s_{j+1}) = \varepsilon_{j+1}'(s_{j+1})$, (Fig-3) 参照] は、(8)式を用いて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2A} (1 - \Gamma_{\theta_1}^2) u_{2,\alpha} - \frac{1}{A} (1 - \Gamma_{\theta_1}^2) u_{b,\alpha} &= \{ -\bar{\Omega}_1(s_2) + \bar{\Omega}_2(s_2) \} \times \psi_{s,\alpha} \\ \frac{1}{3A} (1 - \Gamma_{\theta_1}^2) u_{3,\alpha} - \frac{1}{2A} (1 - \Gamma_{\theta_1}^2) u_{2,\alpha} &= \{ -\bar{\Omega}_2(s_3) + \bar{\Omega}_3(s_3) \} \times \psi_{s,\alpha} \\ \vdots \\ \frac{1}{nA} (1 - \Gamma_{\theta_1}^2) u_{n,\alpha} - \frac{1}{(n-1)A} (1 - \Gamma_{\theta_1}^2) u_{n-1,\alpha} &= \{ -\bar{\Omega}_{n-1}(s_n) + \bar{\Omega}_n(s_n) \} \times \psi_{s,\alpha} \end{aligned} \right\} \text{----- (9)}$$

$$(\bar{\Omega}_j(s) = \frac{K_j \times jS}{jA \cdot jA_0} \text{----- (10)})$$



曲板(n)の中立点の軸方向変位は u_1 を未知関数として、(9)式より次式で表わされる。

$$\frac{1}{nA} (1 - \Gamma_{\theta_1}^2) u_{1,\alpha} = \frac{1}{A} (1 - \Gamma_{\theta_1}^2) u_{b,\alpha} + \sum_{j=1}^{n-1} \{ -\bar{\Omega}_j(s_{j+1}) + \bar{\Omega}_{j+1}(s_{j+1}) \} \times \psi_{s,\alpha} \text{----- (11)}$$

u_1 は、回転変位に起因するそりひずみにより、断面に軸力を生じない条件 ($\sum_{j=1}^n \varepsilon_j dF_j = 0$) より定まる。

$$\frac{1}{A} (1 - \Gamma_{\theta_1}^2) u_{1,\alpha} = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} \{ -\bar{\Omega}_i(s_{i+1}) + \bar{\Omega}_{i+1}(s_{i+1}) \} \times \psi_{s,\alpha} \right\} F_j / \sum_{j=1}^n F_j \text{ (12)}$$

(12)式を(11)式へ代入して α で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{nA} (1 - \Gamma_{\theta_1}^2) u_1 &= \bar{\Omega}_n(nS) \times \psi_{s,\alpha} + C_1 \\ \bar{\Omega}_n(nS) &= \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} \{ -\bar{\Omega}_i(s_{i+1}) + \bar{\Omega}_{i+1}(s_{i+1}) \} \right\} F_j / \sum_{j=1}^n F_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \{ -\bar{\Omega}_j(s_{j+1}) + \bar{\Omega}_{j+1}(s_{j+1}) \} \end{aligned} \text{ (13)}$$

(13)式において、 C_1 は、断面全体の剛体変位を示しているもので、 $C_1 = 0$ とすることができ。 (13)式を(7)式へ代入し、次式が得られる。

$$u_j = (\bar{\Omega}_j - \frac{K_j \times jS}{jA \cdot jA_0}) \psi_{s,\alpha} \text{----- (14)}$$

断面の輪廓線上のそり変位の分布を $\bar{\Omega}(s)$ で表わす。

4. 円曲線部材

円曲線部材の場合には、幾何学量は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} jA &= R_j - jS \cos \theta_j; jA_0 = R_j \\ jB &= 1; jR_\alpha = \frac{R_j - jS \cos \theta_j}{\sin \theta_j} \\ j\Gamma_{\theta_1}^2 &= \frac{\cos \theta_j}{R_j}; j\Gamma_{\theta_1}^3 = \frac{\sin \theta_j}{R_0} \end{aligned} \right\} \text{ (15)}$$

(Fig-2), (Fig-4) 参照

前記の諸式へ(15)の値を代入すれば、円曲線部材の式を得る。

1) そり中心; そり関数 $\bar{\Omega}(s)$ は、断面形状と、回転を考える位置が定まれば、一義的に決定される。G点(断面の重心)で定めた、そり関数を $\bar{\Omega}_G$ とする。任意点(A)まわりの回転を考えると、G点は、 y_2, y_3 軸方向にそれぞれ次の変位を受ける。

$$\bar{v} = a_3 \times \psi, \bar{w} = -a_2 \times \psi \text{ (16)}$$

A点に関するそり関数を $\bar{\Omega}_A$ とすると、(8)式を考慮して、次式で表わされる。

$$\bar{\Omega}_A = \bar{\Omega}_G + \frac{y_2}{R_0} a_3 - \frac{y_3}{R_0} a_2 \text{ (17)}$$

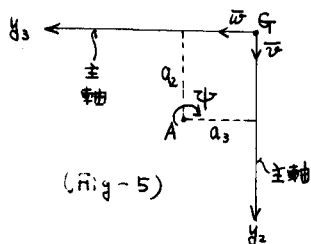
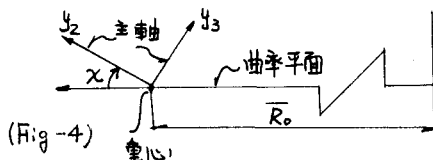
そりひずみは (8)式へ(17)式を代入することにより次式となる。

$$\varepsilon_A = \frac{1}{R(s)} \times \left\{ \bar{\Omega}_G + \frac{y_2}{R_0} a_3 - \frac{y_3}{R_0} a_2 \right\} \times \psi_{s,\alpha} = \bar{\Omega}_A \psi_{s,\alpha} \text{ (18)}$$

A点として、A点に関するそりひずみが、断面の曲げモーメントと独立である点をえらぶには、(18)式のひずみは、条件 $\int_A \varepsilon_A y_2 dF = \int_A \varepsilon_A y_3 dF = 0$ を満足しなければならない。この条件式に(18)式を代入し、次式を得る。

$$a_2 = R_0 \times \frac{\int_A y_3 dF}{J_{y_3}}, \quad a_3 = -R_0 \frac{\int_A y_2 dF}{J_{y_2}} \text{ (19)}$$

$$\text{但し } J_{y_2} = R_0 \int_A \frac{y_2^2}{R} dF, \quad J_{y_3} = R_0 \int_A \frac{y_3^2}{R} dF, \quad J_{\bar{\Omega}_A y_2} = R_0 \int_A \frac{\bar{\Omega}_A y_2}{R} dF, \quad J_{\bar{\Omega}_A y_3} = R_0 \int_A \frac{\bar{\Omega}_A y_3}{R} dF$$



(19)式で定められる点 $A(a_2, a_3)$ を、そり中心とする。

2). 変位と軸方向ひずみの関係； そり中心で表わされる変位を、 u, v, w, ψ とする。重心の変位は、

$$u = \frac{R_0}{R_0} u, \quad v = v + a_2 \psi, \quad w = w - a_3 \psi \quad (20)$$

断面上の任意点の変位は (3)式、(4)式、(5)式、(17)式 で与えられる。特に、軸方向変位は次式で与えられる。

$$U = \left(1 + \frac{\cos \chi}{R_0} y_2 + \frac{\sin \chi}{R_0} y_3\right) u + \frac{y_2}{R_0} v \alpha + \frac{y_3}{R_0} w \alpha + \bar{\Omega}_A \quad (21)$$

又、曲板 j の変位は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} U_j &= U \\ V_j &= -V \times \cos(\theta_j - \chi) + W \times \sin(\theta_j - \chi) \\ W_j &= V \times \sin(\theta_j - \chi) + W \times \cos(\theta_j - \chi) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(6)式へ(22)式を代入すると、円曲線部材のひずみを表わす式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon_j = \frac{1}{R_0 - j \sin \theta_j} \times & \left[\left(1 + \frac{\cos \chi}{R_0} y_2 + \frac{\sin \chi}{R_0} y_3\right) \times u \alpha + \frac{y_2}{R_0} \times v \alpha + \frac{y_3}{R_0} \times w \alpha + \bar{\Omega}_A \times \psi \alpha \right. \\ & + \left\{ \cos \theta_j \times \cos(\theta_j - \chi) + \sin \theta_j \times \sin(\theta_j - \chi) \right\} \times v \\ & + \left\{ -\cos \theta_j \times \sin(\theta_j - \chi) + \sin \theta_j \times \cos(\theta_j - \chi) \right\} \times w \\ & + \left\{ -\cos \theta_j \times \sin(\theta_j - \chi) + \sin \theta_j \times \cos(\theta_j - \chi) \right\} \times (y_2 - a_2) \\ & \left. - \left\{ \cos \theta_j \times \cos(\theta_j - \chi) + \sin \theta_j \times \sin(\theta_j - \chi) \right\} \times (y_3 - a_3) \right] \times \psi \end{aligned} \quad (23)$$

5. 結 語

円曲線部材以外の平面曲線部材では、そり中心が曲率に依存するために、横断面の定箇所には、そり中心を定めることができないが、断面上の一定点を棒軸として定めれば (23)式の導出と同様に、(14)式を用いて、棒軸の変位と軸方向ひずみの関係式を導くことができる。

以上の考察をもとに、釣り合い方程式を導くことが、今後の課題として、残されている。

参考文献

1. 平嶋政治・矢島鏡司；Baustatistischer Beitrag zur Elastische Dünnwandige Stäbe (早大・理工学研究所報告・第45号、1969)
2. F.H. Schroeder；Allgemeine Stabtheorie des dünnwandigen räumlich vorgekrümmten und vorgewandenen Träger mit großen Verformungen. (Ingenieur - Archiv. 39, 1970)
3. K. Washizu；Variational Methods in Elasticity and Plasticity (Pergamon Press Oxford)
4. 深沢泰晴；薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎理論 (土木学会論文集第110号、昭39)
5. 小西一郎・小松定夫；薄肉曲線材の基礎理論 (土木学会論文集・第87号、昭37)

注 1) 平面曲線部材においては、横断面と、曲率平面とのなす角度も、変化しない状態を考えているので、 $\beta_{\theta_1} = 0$ が成り立つ。