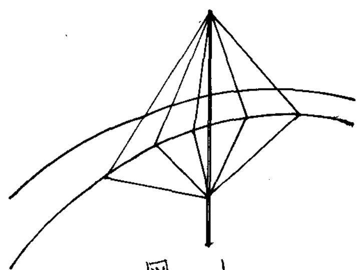
I-191　曲線斜張橋の剛性方程式について

九州工業大学　学生員○中川　進
〃　正員　加藤九州男
〃　〃　山本　宏

1. まえがき

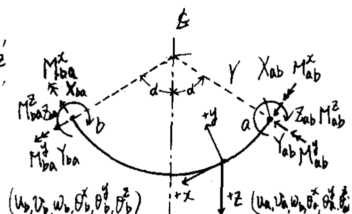
近年，交通量の増加とともに道路網が拡大され，直線橋について，多くの研究が行なわれているが，直線は，一般に地形になじみにくく，特にわが国のように地形の変化の激しい所では，できるだけ地形の変化に合せることが建設費，設計，施工の面からも好ましいので，曲線橋の研究が重要であることは周知の通りである。そこで本報告では，図－1に示すような曲線斜張橋の構造解析について考察する。解析には，有限要素法を用い，変形法の立場をとるものとする。



図－1

2. 基本式

軸力，せん断力，ねじり，曲げを同時に受ける曲線部材の剛性方程式を求める。曲線部材には円弧を選び，ここでいう円弧部材とは，その材軸が一平面内で円弧をなすものとし，その中心角2α，半径をrとする。円弧部材の任意の点で接線(x)，法線(y)，ならびに材軸を含む面に直角の方向(z)を考え，これを部材座標系にえらび，図－2に示す方向を正とする。節点力はx，y，z方向の力をX，Y，Zで，x，y，z軸まわりのモーメントをM^x，M^y，M^zと表わし，節点変位はx，y，z方向の変位をu，v，wと，x，y，z軸まわりの回転角をθ^x，θ^y，θ^zと表わすことにする。節点a，bでの節点力，節点変位を図－2に示す記号で表わし，ひずみエネルギーを用いて，節点力と節点変位の関係を式(1)のように求めることができる。



図－2

$$
\begin{Bmatrix} X_{ab} \\ Y_{ab} \\ Z_{ab} \\ M^x_{ab} \\ M^y_{ab} \\ M^z_{ab} \\ X_{ba} \\ Y_{ba} \\ Z_{ba} \\ M^x_{ba} \\ M^y_{ba} \\ M^z_{ba} \end{Bmatrix}
= \frac{2EI}{2\alpha r}
\begin{bmatrix}
A & \frac{3B}{(2\alpha r)^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3C}{2\alpha r} & G & \frac{3H}{(2\alpha r)^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3J_1}{2\alpha r} \\
 & \frac{3D}{(2\alpha r)^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3E_1}{2\alpha r} & \frac{-3H}{(2\alpha r)^2} & \frac{-3K}{(2\alpha r)^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3N_1}{2\alpha r} \\
 & & \frac{3\mathbb{F}}{(2\alpha r)^2} & \frac{-3\mathbb{E}_1}{2\alpha r} & \frac{-3\mathbb{C}}{2\alpha r} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3\mathbb{F}}{(2\alpha r)^2} & \frac{3\mathbb{E}_1}{2\alpha r} & \frac{-3\mathbb{C}}{2\alpha r} & 0 \\
 & & & \mathbb{D} & -\mathbb{B} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\mathbb{E}_1}{2\alpha r} & \mathbb{I}_1 & \mathbb{H} & 0 \\
 & & & & \mathbb{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\mathbb{C}}{2\alpha r} & \mathbb{H} & \mathbb{G} & 0 \\
 & & & & & F & \frac{3J_1}{2\alpha r} & \frac{-3N_1}{2\alpha r} & 0 & 0 & 0 & I_1 \\
 & & & & & & A & \frac{-3B}{(2\alpha r)^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3C}{2\alpha r} \\
 & & & & & & & \frac{3D}{(2\alpha r)^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3E_1}{2\alpha r} \\
 & & & & & & & & \frac{3\mathbb{F}}{(2\alpha r)^2} & \frac{-3\mathbb{E}_1}{2\alpha r} & \frac{3\mathbb{C}}{2\alpha r} & 0 \\
 & & & \mathrm{SYM.} & & & & & & \mathbb{D} & \mathbb{B} & 0 \\
 & & & & & & & & & & \mathbb{A} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & F
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ \theta^x_a \\ \theta^y_a \\ \theta^z_a \\ u_b \\ v_b \\ w_b \\ \theta^x_b \\ \theta^y_b \\ \theta^z_b \end{Bmatrix}
\quad \text{------------} \quad (1)
$$

式(1)を次のように書くこととする。

$$
\{f\} = [K_c]\{\delta\} \quad \text{------------} \quad (2)
$$

なお式中の$2\alpha r$は弧長であり、A, B, C, ……は式(3)のように部材の幾何学的形状と材料の縦および横弾性係数によってきまる定数である。たとえば、

$$A=\frac{\alpha}{2}\{\alpha(\sin4\alpha-4\alpha)(r^2+\lambda_1)+(3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha)r^2\}/L_1$$
$$B=2\alpha^3r^2\{(1-\cos4\alpha)(r^2+\lambda_1)+(\sin4\alpha-2\sin2\alpha)r^2\}/3L_1$$
$$C=\frac{\alpha^2}{2}r^2\{2\alpha(4\alpha-2\sin2\alpha-\sin4\alpha)(r^2+\lambda_1)+(1-\cos4\alpha)\lambda_1-5+8\cos2\alpha-3\cos4\alpha\}/3L_1$$
$$D=2\alpha^3r^2\{\alpha(4\alpha-\sin4\alpha)(r^2+\lambda_1)+(1-\cos4\alpha)r^2\}/3L_1$$
$$E_1=\frac{\alpha^2}{2}r^2\{\alpha(-3+\cos4\alpha+2\cos2\alpha)(r^2+\lambda_1)+(2\sin2\alpha-\sin4\alpha)(3r^2+\lambda_1)\}/3L_1$$

省略

$$L_1=\frac{\alpha}{4}(r^2+\lambda_1)\{2\alpha(4\alpha+\sin4\alpha-4\alpha\cos2\alpha-2\sin2\alpha)+(1-\cos4\alpha-8\alpha^2)(r^2+\lambda_1)\}$$

$$\mathbb{A}=[2\alpha^2\{\alpha(1+\lambda_2)-(1-\lambda_2)\frac{\sin4\alpha}{4}\}-\alpha\lambda_2\sin^2 2\alpha]/L_2$$
$$\mathbb{B}=\alpha\sin^2\alpha[(1-3\lambda_2)\sin2\alpha-2\alpha\{(1-\lambda_2)(\cos2\alpha-2\lambda_2\}]/L_2$$
$$\mathbb{C}=2\alpha^2\sin^2\alpha[2\alpha(1+\lambda_2)+(1-\lambda_2)\sin2\alpha]/3L_2$$
$$\mathbb{D}=[\alpha^2(1+\lambda_2)\{\alpha(1+3\lambda_2)-2\lambda_2\sin2\alpha\}-4\alpha\lambda_2^2\sin^4\alpha-\alpha(1-\lambda)\frac{\sin^2\alpha}{4}\{4\alpha\lambda_2\cos2\alpha-(1+3\lambda_2)\sin2\alpha\}]/\lambda_2L_2$$
$$\mathbb{E}_1=2\alpha^2(1+\lambda_2)[\alpha^2(1+\lambda_2)+\alpha\lambda_2\sin2\alpha+(1-\lambda_2)\frac{\sin^2\alpha}{4}]/3\lambda_2L_2$$

省略

$$L_2=2[\alpha(1+\lambda_2)\{\alpha^2(1+\lambda_2)-2\lambda_2\sin^2\alpha\}-(1-\lambda_2)\sin^2\alpha\{\alpha(1-\lambda_2)\cos^2\alpha+\lambda_2\sin2\alpha\}] \quad (3)$$

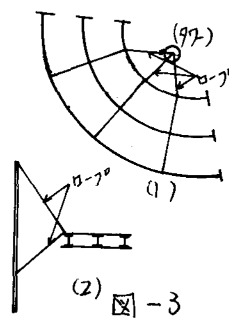
$\lambda_1=\frac{EI}{EA}$, $\lambda_2=\frac{EI}{GJ}$（EI：曲げ剛度，GJ：ねじれ剛度）

式(3)の極限値は，周知の直線部材の剛性マトリックス（$[K_D]$）に他ならぬ。

3．曲線斜張橋の解析

図－3は円弧部材を同心円状にならべて主桁とし，これに交わる直線部材を横桁とし，内側主桁の格点にロープを取りつけた曲線斜張橋である。（図－1参照）

主桁が同心円状にならべてあるので全体座標系を円弧部材の部材座標系と同じにとれば，式(1)が全体座標系における円弧部材の剛性方程式となる。次にロープの部材座標系における剛性マトリックスは，ロープには，曲げやねじりは働かず，軸力のみを考えればよいので剛性マトリックス$[K_D]$の曲げとねじりの項を0とすればよい。ロープや直線部材については，部材座標系（x, y, z）を全体座標系（$\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$）に変換するには，次式(4)のような変換マトリックスを用いればよい。



図－3

$$T=\begin{bmatrix}\Lambda&&&\\&\Lambda&&\\&&\Lambda&\\&&&\Lambda\end{bmatrix} \text{------}(4) \qquad \text{ここで} \qquad \Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_{x\bar{x}}&\lambda_{x\bar{y}}&\lambda_{x\bar{z}}\\\lambda_{y\bar{x}}&\lambda_{y\bar{y}}&\lambda_{y\bar{z}}\\\lambda_{z\bar{x}}&\lambda_{z\bar{y}}&\lambda_{z\bar{z}}\end{bmatrix}$$

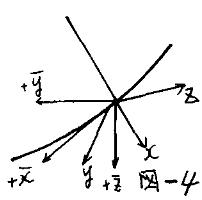
ただし，$\lambda_{p\bar{q}}$は，部材座標系のp軸が全体座標系の$\bar{q}$軸に対してなす方向余弦である。

したがって，全体座標系におけるロープの剛性マトリックスは，

$$[\bar{K}_R]=[T_R]^T[K_R][T_R] \text{------------------------}(5)$$

又，全体座標系における直線部材の剛性マトリックスは，

$$[\bar{K}_D]=[T_D]^T[K_D][T_D] \text{------------------------}(6)$$



図－4

で求められる。以上の剛性マトリックス$[K_c]$, $[\bar{K}_R]$, $[\bar{K}_D]$を適用すれば，曲線斜張橋の剛性方程式が求められるのである。このマトリックスの要素の配列には規則性があり，全く機械的に作ることができ，その規則性を利用すれば，主桁ならびに横桁の数が増えて，節点数が多くなっても簡単にマトリックスを作ることができることなどは，周知の通りである。

4．結論

以上をまとめれば，

(1) 曲げ，ねじりおよび軸方向力を考慮した円弧部材の剛性マトリックスを明らかにし，その要素に含まれる係数を求めた。

(2) この剛性マトリックスが直線部材の剛性マトリックスをも含んでいることを示し，

(3) この部材剛性マトリックスをもとに，曲線斜張橋の剛性方程式を求めたのであるが，

(4) このような構造解析には電子計算機を用いれば，機械的な仕事になってしまう。

なお，数値計算の結果については，講演当日に報告する予定である。