I-185　ケーブル構造に於ける滑車条件の解析

(株) 宮地鉄工所　　正員　前田武夫

[1] まえがき

ケーブル構造に於ける滑車の取扱に関しては，林・前田が，曲率半径の影響を無視した場合について，研究を行なっているが，本文は，これと同一の仮定に基いて，「非線型有限変形法」の立場から考察を加え，更に，曲率半径の影響を考慮した解式を誘導したものである。

[2] 曲率半径の影響を無視した場合

右図に於て，i-k 部材，j-k 部材の絶対座標系への投影成分，部材長，方向余弦は，各々，

$$d_m=[x_m-x_k,\ y_m-y_k]^*,\quad l_m=\sqrt{d_m^* d_m},\quad \alpha_m=\frac{d_m}{l_m}\quad (m=i,j)\quad \text{---}(1)$$

であり，変形後について，

$$(l_m+\Delta l_m)^2=(d_m+\Delta d_m)^*(d_m+\Delta d_m)\quad \text{---}(2)$$

から

$$\omega_m=\frac{2}{l_m^2}\left(d_m+\frac{1}{2}\Delta d_m\right)^*\Delta d_m,\quad X_m=1-\frac{1}{4}\omega_m+\frac{1}{8}\omega_m^2-\frac{1}{64}\omega_m^3+\cdots\quad \text{---}(3)$$

とおけば，部材長増分，方向余弦増分は

$$\Delta l_m=\frac{X_m}{l_m}\left(d_m+\frac{1}{2}\Delta d_m\right)^*\Delta d_m,\quad \Delta\alpha_m=\frac{1}{l_m+\Delta l_m}\left[e-\frac{X_m}{l_m}\alpha_m\left(d_m+\frac{1}{2}\Delta d_m\right)^*\right]\Delta d_m\quad \text{---}(4)$$

となる。故に，今，

$$F=\frac{EA+N}{l_i+l_j}\quad \text{---}(5)$$

とおけば，軸力増分は，

$$\Delta N=F\left[\frac{X_i}{l_i}\left(d_i+\frac{1}{2}\Delta d_i\right)^*\Delta d_i+\frac{X_j}{l_j}\left(d_j+\frac{1}{2}\Delta d_j\right)^*\Delta d_j\right]\quad \text{---}(6)$$

と表わされ，更に，

$$\mu_m=\frac{N+\Delta N}{l_m+\Delta l_m}\quad \text{---}(7)$$

とおけば，絶対座標系に於ける格点力増分は，

$$\begin{bmatrix}\Delta D_i\\ \Delta D_j\end{bmatrix}=\Delta N\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \alpha_j\end{bmatrix}+(N+\Delta N)\begin{bmatrix}\Delta\alpha_i\\ \Delta\alpha_j\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}F\frac{X_i}{l_i}\alpha_i\left(d_i+\frac{1}{2}\Delta d_i\right)^*+\mu_i\left[e-\frac{X_i}{l_i}\alpha_i\left(d_i+\frac{1}{2}\Delta d_i\right)^*\right], & F\frac{X_j}{l_j}\alpha_i\left(d_j+\frac{1}{2}\Delta d_j\right)^*\\ F\frac{X_i}{l_i}\alpha_j\left(d_i+\frac{1}{2}\Delta d_i\right)^*, & F\frac{X_j}{l_j}\alpha_j\left(d_j+\frac{1}{2}\Delta d_j\right)^*+\mu_j\left[e-\frac{X_j}{l_j}\alpha_j\left(d_j+\frac{1}{2}\Delta d_j\right)^*\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta d_i\\ \Delta d_j\end{bmatrix}\underline{\underline{\Delta}}\begin{bmatrix}A_i & B_i\\ B_j & A_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta d_i\\ \Delta d_j\end{bmatrix}\quad \text{---}(8)$$

となる。ここで，

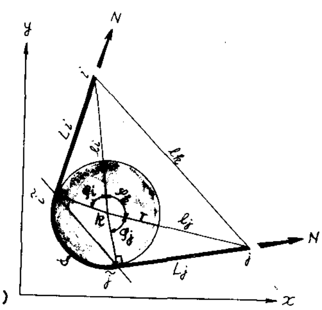
$$\Delta x_k=[\Delta x_k,\ \Delta y_k]^*,\quad \Delta x_m=[\Delta x_m,\ \Delta y_m]^*,\quad (m=i,j)\quad \text{---}(9)$$

とおけば，

$$\Delta d_i=\Delta x_i-\Delta x_k,\quad \Delta d_j=\Delta x_j-\Delta x_k\quad \text{---}(10)$$

である故，

$$\begin{bmatrix}\Delta D_i\\ \Delta D_j\\ \Delta D_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_i & B_i & -(A_i+B_i)\\ B_j & A_j & -(A_j+B_j)\\ A_i+B_j & B_i+A_j & -(A_i+B_i+A_j+B_j)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_i\\ \Delta x_j\\ \Delta x_k\end{bmatrix}\quad \text{---}(11)$$



なる，Unit-equation が得られる。更に，滑車がバネ支承されている時，そのバネ係数を，$\nu_x,\ \nu_y$ とおけば，

$$\Delta D_k=\nu\cdot\Delta x_k,\quad \nu\underline{\underline{\Delta}}\begin{bmatrix}\nu_x & \\ & \nu_y\end{bmatrix}\quad \text{---}(12)$$

から，

$$\Delta x_k=\left[\mathbf{V}+\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i+\mathbf{A}_j+\mathbf{B}_j\right]^{-1}\cdot\left[\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_j\ ,\ \mathbf{B}_i+\mathbf{A}_j\right]\left[\Delta x_i\ ,\ \Delta x_j\right]^{*}\overset{d}{=}\mathbf{C}\left[\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_j\ ,\ \mathbf{B}_i+\mathbf{A}_j\right]\left[\Delta x_i\ ,\ \Delta x_j\right]^{*} \qquad \text{--- (13)}$$

$$\therefore\ \begin{bmatrix}\Delta D_i\\ \Delta D_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_i-(\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i)\mathbf{C}(\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_j) & ,\ \mathbf{B}_i-(\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_i)\mathbf{C}(\mathbf{A}_j+\mathbf{B}_i)\\ \mathbf{B}_j-(\mathbf{A}_j+\mathbf{B}_j)\mathbf{C}(\mathbf{A}_i+\mathbf{B}_j) & ,\ \mathbf{A}_j-(\mathbf{A}_j+\mathbf{B}_j)\mathbf{C}(\mathbf{A}_j+\mathbf{B}_i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_i\\ \Delta x_j\end{bmatrix} \qquad \text{--- (14)}$$

が得られる。

[3] 曲率の影響を考慮した場合

3.1 接線の方向余弦増分

$$\mathbf{e}=\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix}\ ,\quad \mathbf{e}'=\begin{bmatrix} & -1\\ 1 & \end{bmatrix}\ ,\quad \mathbf{r}_m=\frac{r}{l_m}\left[r\mathbf{e}+L_m\mathbf{e}'\right]\qquad (m=i,j) \qquad \text{--- (15)}$$

とおけば，$k\rightarrow m$ 方向の直線の左側に接点を見る時，接点座標，$\tilde{x}_m\overset{d}{=}[x_m,\ y_m]^{*}$ は，

$$\tilde{x}_m=x_k+\mathbf{r}_m\cdot\alpha_m \qquad \text{--- (16)}$$

であり，接点を右側に見る時

$$\tilde{x}_m=x_k+\mathbf{r}_m^{*}\alpha_m \qquad \text{--- (17)}$$

である。以上をまとめて，一般に，

$$\tilde{x}_m=x_k+\tilde{\mathbf{r}}_m\cdot\alpha_m \qquad \text{--- (18)}$$

なる形式に書ける。以後，適宜 suffix を略す。接線の方向余弦は，

$$\tilde{\alpha}=\frac{x-\tilde{x}}{L}=\frac{x-x_k-\tilde{\mathbf{r}}\alpha}{L}=\frac{l\alpha-\tilde{\mathbf{r}}\alpha}{L}=\frac{l\mathbf{e}-\tilde{\mathbf{r}}}{L}\alpha\overset{d}{=}\mathbf{F}\alpha \qquad \text{--- (19)}$$

と書ける。各変数の増分は，

$$\Delta L=\frac{l}{L}\Delta l\overset{d}{=}f_L\cdot\Delta l \qquad \text{--- (20)}$$

$$\Delta\mathbf{r}=\frac{1}{l}\left[r\mathbf{e}'\Delta L-\mathbf{r}\cdot\Delta l\right]=\frac{1}{l}\left[r\cdot f_L\cdot\mathbf{e}'-\mathbf{r}\right]\Delta l\overset{d}{=}\mathbf{T}\cdot\Delta l\ ,\quad \Delta\mathbf{r}^{*}=\mathbf{T}^{*}\Delta l \qquad \text{--- (21)}$$

であり，これ等を一般に

$$\Delta\tilde{\mathbf{r}}=\tilde{\mathbf{T}}\Delta l \qquad \text{--- (22)}$$

とおく。又，

$$\Delta\mathbf{F}=\frac{1}{L}\left[\mathbf{e}\Delta l-\Delta\tilde{\mathbf{r}}-\mathbf{F}\Delta L\right]=\frac{1}{L}\left[\mathbf{e}-\tilde{\mathbf{T}}-f_L\mathbf{F}\right]\Delta l\overset{d}{=}\mathbf{H}\cdot\Delta l \qquad \text{--- (23)}$$

$$\Delta\tilde{\alpha}=\Delta\mathbf{F}\alpha+\mathbf{F}\Delta\alpha=\alpha^{*}\mathbf{H}^{*}\Delta l+\mathbf{F}\Delta\alpha=\left[\mathbf{H}\alpha\alpha^{*}+\frac{\mathbf{F}(\mathbf{e}-\alpha\alpha^{*})}{l}\right]\Delta d\overset{d}{=}\tilde{\mathbf{G}}\Delta d \qquad \text{--- (24)}$$

3・2 円弧中心角増分

$$\cos\varphi_m=\frac{r_m}{l_m}\overset{d}{=}\hat{\alpha}_m\qquad (m=i,j) \qquad \text{--- (25)}$$

$$\hat{\alpha}+\Delta\hat{\alpha}=1-\frac{(\varphi+\Delta\varphi)^2}{2!}+\frac{(\varphi+\Delta\varphi)^4}{4!}-\frac{(\varphi+\Delta\varphi)^6}{6!}+\cdots(-1)^n\frac{(\varphi+\Delta\varphi)^{2n}}{(2n)!}+\cdots \qquad \text{--- (26)}$$

$$\therefore\ \Delta\hat{\alpha}=-\frac{(\varphi+\Delta\varphi)^2-\varphi^2}{2!}+\frac{(\varphi+\Delta\varphi)^4-\varphi^4}{4!}-\frac{(\varphi+\Delta\varphi)^6-\varphi^6}{6!}+\cdots(-1)^n\frac{(\varphi+\Delta\varphi)^{2n}-\varphi^{2n}}{(2n)!}+\cdots \qquad \text{--- (27)}$$

今，

$$(\varphi+\Delta\varphi)^n-\varphi^n\doteqdot n\cdot\Delta\varphi\cdot\varphi^{n-1} \qquad \text{--- (28)}$$

$$\therefore\ \Delta\hat{\alpha}=\Delta\varphi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad \text{--- (29)}$$

且つ，

$$\Delta\hat{\alpha}=-\frac{r}{l^2}\Delta l \qquad \text{--- (30)}$$

$$\Delta\varphi=-\frac{\dfrac{r}{l^2}}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!}}\Delta l\overset{d}{=}a\cdot\Delta l \qquad \text{--- (31)}$$

更に，

$$\hat{\alpha}_k\overset{d}{=}\cos\varphi_k=\frac{l_i^2+l_j^2-l_k^2}{2\,l_i\cdot l_j} \qquad \text{--- (32)}$$

$$\therefore\ \Delta\hat{\alpha}_k=\frac{1}{l_i\cdot l_j}\left[l_i-\hat{\alpha}_k l_j\ ,\ l_j-\hat{\alpha}_k l_i\ ,\ -l_k\right]\left[\Delta l_i\ ,\ \Delta l_j\ ,\ \Delta l_k\right]^{*} \qquad \text{--- (33)}$$

且つ，

$$\Delta\hat{\alpha}_k=\Delta\varphi_k\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi_k^{\,2n-1}}{(2n-1)!} \qquad \text{--- (34)}$$

$$\Delta\varphi_k = \frac{1}{l_i \cdot l_j \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi_k^{2n-1}}{(2n-1)!}} \left[l_i - \hat{\alpha}_k l_j ,\ l_j - \hat{\alpha}_k l_i ,\ -l_k \right] \begin{bmatrix} \Delta l_i \\ \Delta l_j \\ \Delta l_k \end{bmatrix} \stackrel{d}{=} \left[b_i ,\ b_j ,\ a_k \right] \begin{bmatrix} \Delta l_i \\ \Delta l_j \\ \Delta l_k \end{bmatrix} \qquad \text{--- (35)}$$

以上をまとめて，

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_i \\ \Delta\varphi_j \\ \Delta\varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & & \\ & a_j & \\ b_i & b_j & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l_i \\ \Delta l_j \\ \Delta l_k \end{bmatrix} \qquad ie \qquad \Delta\boldsymbol{\varphi} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{a} \cdot \Delta\boldsymbol{l} \qquad \text{--- (36)}$$

3・3 部材長増分

直線 $\overrightarrow{ij}$ に関し，$i \cdot j$ と k が同側に在れば，円弧長 s は，

$$s = r\left[2\pi - \varphi_i - \varphi_j - \varphi_k \right] \qquad \text{--- (37)}$$

反対側に在れば，

$$s = r\left[\varphi_k - \varphi_i - \varphi_j \right] \qquad \text{--- (38)}$$

よって，同側，及び，反対側に対して

$$\boldsymbol{c} = \left[-1 ,\ -1 ,\ -1 \right] \quad , \quad or \quad \boldsymbol{c} = \left[-1 ,\ -1 ,\ 1 \right] \qquad \text{--- (39)}$$

とおけば，円弧長増分は

$$\Delta s = r \cdot \boldsymbol{c} \cdot \Delta\boldsymbol{\varphi} = r \cdot \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \Delta\boldsymbol{l} \qquad \text{--- (40)}$$

よって，全部材長増分は，

$$\Delta S = \Delta L_i + \Delta L_j + \Delta s = \left[f_{Li} ,\ f_{Lj} ,\ 0 \right] \left[\Delta l_i ,\ \Delta l_j ,\ \Delta l_k \right]^* + r\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \Delta\boldsymbol{l} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{f}_L \cdot \Delta\boldsymbol{l} + r\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \Delta\boldsymbol{l} = \left[\boldsymbol{f}_L + r\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \right] \Delta\boldsymbol{l} \qquad \text{--- (41)}$$

ここで，

$$\begin{bmatrix} \Delta l_i \\ \Delta l_j \\ \Delta l_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{ik}^* (\Delta x_i - \Delta x_k) \\ \alpha_{jk}^* (\Delta x_j - \Delta x_k) \\ \alpha_{ij}^* (\Delta x_i - \Delta x_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{ik}^* & & -\alpha_{ik}^* \\ & \alpha_{jk}^* & -\alpha_{jk}^* \\ \alpha_{ij}^* & -\alpha_{ij}^* & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta x_j \\ \Delta x_k \end{bmatrix} \qquad \text{--- (42)}$$

これを，

$$\Delta\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \Delta\boldsymbol{x} \qquad \text{--- (43)}$$

と書けば

$$\Delta S = \left[\boldsymbol{f}_L + r\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \right] \hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \Delta\boldsymbol{x} \qquad \text{--- (44)}$$

3・4 格点力増分

軸力増分は，

$$\Delta N = F \Delta S = F\left[\boldsymbol{f}_L + r\boldsymbol{c}\boldsymbol{a} \right] \hat{\boldsymbol{\alpha}}\, \Delta\boldsymbol{x} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{Q} \cdot \Delta\boldsymbol{x} \qquad \text{--- (45)}$$

更に，

$$\Delta\boldsymbol{\alpha}_{mk} = \frac{1}{l_m}\left[\boldsymbol{e} - \boldsymbol{\alpha}_{mk} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{mk}^* \right] (\Delta\boldsymbol{x}_m - \Delta\boldsymbol{x}_k) \stackrel{d}{=} G_{mk} (\Delta\boldsymbol{x}_m - \Delta\boldsymbol{x}_k) \qquad (m = i, j) \qquad \text{--- (46)}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\alpha_{ik} \\ \Delta\alpha_{jk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ik} & & -G_{ik} \\ & G_{jk} & -G_{jk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta x_j \\ \Delta x_k \end{bmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{bmatrix} R_i \\ R_j \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \qquad \text{--- (47)}$$

であり，格点力増分は，

$$\Delta D_m = \Delta N \cdot \alpha_{mk} + N \Delta\alpha_{mk} = \alpha_{mk} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \Delta\boldsymbol{x} + N \cdot R_m \cdot \Delta\boldsymbol{x} \qquad \text{--- (48)}$$

よって，

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \alpha_{ik} \cdot \boldsymbol{Q} + N \cdot R_i \\ \alpha_{jk} \cdot \boldsymbol{Q} + N \cdot R_j \\ (\alpha_{ik} + \alpha_{jk})\boldsymbol{Q} + N(R_i + R_j) \end{bmatrix} , \qquad \Delta\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \Delta D_i \\ \Delta D_j \\ \Delta D_k \end{bmatrix} \qquad \text{--- (49)}$$

とおけば，

$$\Delta\boldsymbol{D} = \mathbb{K} \cdot \Delta\boldsymbol{x} \qquad \text{--- (50)}$$

なる剛性方程式が得られる。バネ支承の取扱に関しては前節と同様である。

[4] 参考文献

前田・林・前田 「大径間斜張橋の非線形性状について」（才２７回年次学術講演会）