

法政大学

正 大地 羊三

センチュリリサーチセンター 正 渡辺 隆久

1. はじめに

吊橋の応力解析において撓度理論に基づいて導かれた基礎微分方程式の解は、一般に数値計算に便利な形に表わされている。たとえばラプラス変換による方法あるいはガラーキン法などともその一つである。また一般の構造解析において広く用いられている変形法にもとづいて微分方程式の解を変形剛性マトリックスを求め解を得るのも一つの方法である。この場合既存の変形法による構造解析プログラムに簡単に組み込み吊橋解析が行なえるという利点がある。本報では、ケーブルと補剛トラスが一体となった一般化部材要素を考えた剛性マトリックスの形式を明らかにするとともに数値計算例を示す。

2. 基礎微分方程式

偏心荷重を受けた場合断面変形を考慮した補剛トラスの微分方程式とケーブルの方程式は、次のようになる。

$$EI V'' - \tilde{H} V' = P_0 + (h_1 + h_2) \tilde{\gamma} + \frac{E}{2} (h_2 - h_1) (\varphi' + \phi') \quad (1a)$$

$$Q W'' - b_2 W - b_2 \varphi' - b_1 \phi' = 0 \quad (1b)$$

$$-b_2 W' - (b_1 + \frac{E}{2} \tilde{H}) \varphi' - (b_2 + \frac{E}{2} \tilde{H}) \phi' = m \varphi + \frac{E}{2} (h_2 - h_1) \tilde{\gamma} + \frac{E}{2} (h_2 - h_1) V' \quad (1c)$$

$$-b_1 W' - (b_2 + \frac{E}{2} \tilde{H}) \varphi' - (b_1 + \frac{E}{2} \tilde{H}) \phi' = m \phi + \frac{E}{2} (h_2 - h_1) \tilde{\gamma} + \frac{E}{2} (h_2 - h_1) V' - \gamma \phi \quad (1d)$$

$$\frac{E}{EA_c} h_1 + \mu = T_1 L_1 - \int_0^L \tilde{\gamma} \{ V' - \frac{E}{2} (\varphi' + \phi') \} dx = U_{1a} - U_{1b} \quad (2a)$$

$$\frac{E}{EA_c} h_2 + \mu = T_2 L_2 - \int_0^L \tilde{\gamma} \{ V' + \frac{E}{2} (\varphi' + \phi') \} dx = U_{2a} - U_{2b} \quad (2b)$$

ただし $\tilde{H} = 2H + h_1 + h_2$, $L_1 = \int_0^L (\frac{dx}{dx})^2 dx$, $L_2 = \int_0^L (\frac{dx}{dx})^2 dx$ といふ。 V, W, φ, ϕ は鉛直たわみ, ねじり角, ねじり角, ねじり角 A, b_1, b_2, γ はウラソフにより与えられた定数, H, A_c はケーブルの死荷重水平張力と断面積, h_1, h_2 は左右ケーブルの活荷重水平張力, P_0, m, μ, γ は鉛直荷重, ねじり荷重, ねじり荷重である。

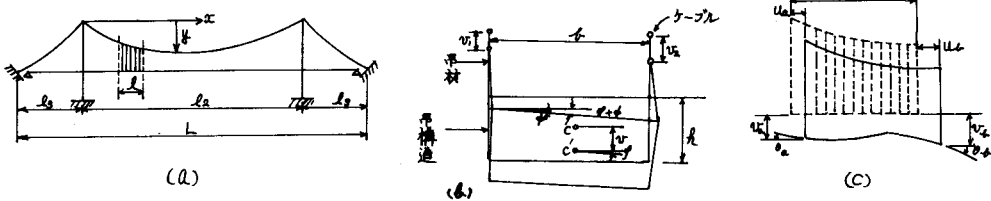


図1. (a) 吊橋部材, (b) 橋断面の変形状態, (c) 側面の変形状態

3. 吊橋部材の剛性マトリックス

この吊橋部材とは図1に示したように補剛トラスと吊橋とケーブルを一体とし正剛性で切り出したものを一方向一般化した部材と考へてゐる。従つて(1)式の解 (V, W, φ, ϕ) は正剛性で切られた部材の(1)式の非線形項を(2)項と横剛性項を除いた解と考へる。(2)式のケーブル方程式も正剛性で適用できる形に変形するために死荷重載荷時のケーブル形状は取物線であるという仮定を用いて部分積分を行なうと次の式が得られる。

$$\frac{E}{EA_c} h_1 = U_{1a} - \{ U_{1b} - \frac{E}{2} (\varphi_a + \phi_a) \} \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{2H} + \frac{E}{2H} \right) + U_{1c} + U_{1d} - \frac{E}{2} (\varphi_a + \phi_a) \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{2H} + \frac{E}{2H} \right) + \frac{E}{2H} \int_0^L \{ V - \frac{E}{2} (\varphi + \phi) \} dx - \mu T_1 L_1 \quad (3a)$$

$$\frac{E}{EA_c} h_2 = U_{2a} - \{ U_{2b} + \frac{E}{2} (\varphi_a + \phi_a) \} \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{2H} + \frac{E}{2H} \right) + U_{2c} + U_{2d} - \frac{E}{2} (\varphi_a + \phi_a) \left(\frac{\gamma_a - \gamma_b}{2H} + \frac{E}{2H} \right) + \frac{E}{2H} \int_0^L \{ V + \frac{E}{2} (\varphi + \phi) \} dx - \mu T_2 L_2 \quad (3b)$$

補剛トラスのせん断力は図2の(a), (b)との関係より(4a)式のように得られる。また, 曲げモーメント, ねじりモーメント, バイモーメント, ねじりモーメントは(4b), (4c), (4d)式のように与えられる。

$$S = -EI (V'' - \frac{1}{EI} \tilde{H} V') + (h_1 + h_2) \left\{ \frac{E}{2H} \left(\frac{L}{2} - x \right) + \frac{1}{2} (\gamma_a - \gamma_b) \right\} \quad (4a) \quad M = -EI V' \quad (4b)$$

$$M_w = -Q W' \quad (4c) \quad T = b_2 W + b_1 \varphi' + b_2 \phi' + \frac{1}{2} b_2^2 H (\varphi' + \phi') \quad (4d)$$

$$\varphi = \phi_1 \psi + \phi_2 \varphi' + \phi_1 \phi' + \frac{1}{2} \phi^2 H (\varphi' + \phi') \quad (4c)$$

(1) 式より得た解を(3)(4)式に代入し図3を参照してA端、B端の4-アール活荷重水平強力と断面力とを求めマトリックス表示すれば、吊橋部材の剛性マトリックスは図4のようになる。

4. 非線形項と横剛性の考慮

(1) 式の非線形項は次のように考慮する。(4c)(4d)(4e)式より M_u を求め、さらに(1c)(1d)式の右辺を用いて2次式を得る。

$$\varphi'' + \phi'' = \left\{ M_u - \frac{2\alpha}{\delta_1 + \delta_2} (m\varphi - \frac{\delta}{2} (\delta_2 - \delta_1) (\frac{\varphi}{2H} + \frac{H}{EI})) \right\} \frac{2\beta^2}{\delta^2 H} \quad (5)$$

ここで δ は死荷重、 $\beta^2 = (\delta_1 + \delta_2) \delta^2 H / 2\alpha (\delta_1 + \delta_2 + \delta^2 H)$ である。 $V'' = -\frac{H}{EI}$ と(5)式を非線形項に代入し繰り返し計算の初近似値の計算より荷重項として考慮する。また横剛性は補剛トラスの対傾によりトラスの橋長とに生ずるベキ定数と考える。よってそれぞれの中に対応する対傾要素にベキ定数として $\frac{1}{EI}$ を加えて考慮する。

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_a \\ \tilde{f}_a \\ \tilde{T}_a \\ \tilde{u}_b \\ \tilde{f}_b \\ \tilde{T}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{0} & 0 & 0 & \tilde{0} \\ 0 & B_1 & \tilde{0} & 0 & \tilde{0} & B_2 \\ \tilde{0}^+ & \tilde{0}^+ B_3 & \tilde{0}^+ & \tilde{0}^+ & \tilde{0}^+ & \tilde{0}^+ \\ 0 & 0 & \tilde{0} & 0 & 0 & \tilde{0} \\ 0 & \tilde{B}_1^+ & \tilde{0} & 0 & \tilde{B}_1^+ & \tilde{0} \\ \tilde{0}^+ & \tilde{0}^+ & \tilde{B}_2^+ & \tilde{0}^+ & \tilde{0}^+ & \tilde{B}_2^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1^+ \\ K_2^+ \\ K_3^+ \\ -K_1^+ \\ -K_2^+ \\ -K_3^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1^+ \\ K_2^+ \\ K_3^+ \\ -K_1^+ \\ -K_2^+ \\ -K_3^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_a \\ \tilde{f}_a \\ \tilde{T}_a \\ \tilde{u}_b \\ \tilde{f}_b \\ \tilde{T}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1^+ \\ K_2^+ \\ K_3^+ \\ -K_1^+ \\ -K_2^+ \\ -K_3^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_a \\ \tilde{f}_a \\ \tilde{T}_a \\ \tilde{u}_b \\ \tilde{f}_b \\ \tilde{T}_b \end{bmatrix}$$

右上添字とは取重、右下添字 A は A 端、 B は B 端を示して、 $\tilde{0}$ の成分は、同じである。

$$\tilde{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{0}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{33} & B_{34} \\ B_{34} & B_{44} \end{bmatrix}, \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} -B_{33} & B_{34} \\ -B_{34} & B_{44} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{55} & B_{56} & B_{57} \\ B_{56} & B_{66} & B_{67} \\ B_{57} & B_{67} & B_{77} \end{bmatrix}, \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} -B_{55} & B_{56} & B_{57} \\ -B_{56} & B_{66} & B_{67} \\ -B_{57} & B_{67} & B_{77} \end{bmatrix}, \tilde{B}_3 = \begin{bmatrix} B_{35} & B_{36} & B_{37} \\ B_{36} & B_{66} & B_{67} \\ B_{37} & B_{67} & B_{77} \end{bmatrix}, \tilde{B}_4 = \begin{bmatrix} B_{33} & B_{34} \\ B_{34} & B_{44} \end{bmatrix}, K_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} T & -\frac{gH}{2H} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{K} = \begin{bmatrix} K\varphi & 0 \\ 0 & K_v \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{K\varphi}{4H} & \frac{T\delta}{2} & \frac{T\delta}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{K}_a = \begin{bmatrix} k_{1a} \\ k_{2a} \end{bmatrix}, \tilde{M}_a = \begin{bmatrix} S_a \\ M_a \end{bmatrix}, \tilde{T}_a = \begin{bmatrix} M_{ua} \\ T_a \end{bmatrix}, \tilde{u}_a = \begin{bmatrix} u_{1a} \\ u_{2a} \end{bmatrix}, \tilde{\theta}_a = \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_{2a} \end{bmatrix}, \tilde{\varphi}_a = \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_{2a} \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -K \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_u \\ m\varphi \end{bmatrix}, \bar{P} = \begin{bmatrix} \frac{gH}{2H} P_f - \frac{1}{2} \mu k_1 (\theta_{T1} + \theta_{T2}) \\ \frac{gH}{2H} m_f - \frac{1}{2} \mu k_2 (\theta_{T2} - \theta_{T1}) \end{bmatrix}, \alpha^2 = \frac{2H}{EI}, H = H + \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2), B_{33} = \frac{12}{EI} (\frac{E\delta^2}{12} + \frac{H^2}{12}), T = \frac{1}{2} (g\delta_1 - 2\alpha)$$

$$G = \frac{12}{EI} (1 - \frac{(H\delta)^2}{60}), \bar{G} = (1 + \frac{H\delta^2}{12\alpha}) (1 - \frac{(H\delta)^2}{12}) - \frac{H\delta^2 (H\delta)^2}{60\alpha^2 \frac{12}{EI}}, B_{55} = \frac{12}{EI} (\frac{a}{\delta^2} + \frac{1}{3} - \frac{(H\delta)^2}{45} \delta_1), \bar{B}_{55} = \frac{12}{EI} (\frac{a}{\delta^2} - \frac{1}{3} + \frac{7(H\delta)^2}{360} \delta_1), B_{56} = \frac{6\delta}{2EI} (1 - \frac{(H\delta)^2}{12}), B_{57} = \frac{6\delta}{2EI} (1 - \frac{(H\delta)^2}{12}), B_{67} = \frac{2}{EI} (B_{56} + \frac{H\delta^2}{4H}), B_{77} = \frac{2}{EI} (B_{57} + \frac{H\delta^2}{4H}), B_{66} = B_{77} + \frac{12}{EI} \delta a (\delta_1^2 - \delta_2^2), K = \frac{12\alpha\beta^2}{EI^2} (1 - \frac{(H\delta)^2}{60}), \lambda P = \frac{H^2}{720EI} (1 - \frac{(H\delta)^2}{42}), \lambda m = \frac{H^2}{24H} (1 - \frac{2\alpha\beta^2}{EI^2}), k\varphi = \frac{2EcAc}{EI} (\frac{gH}{2H}) \frac{2}{EI}, k_v = \frac{2EcAc}{EI} (\frac{gH}{2H})^2 \frac{2}{EI}, \Delta = (1 + k_v + k\varphi)^2 - (k_v - k\varphi)^2, K\varphi = \frac{2EcAc}{EI} (1 + 2k\varphi), K_v = \frac{2EcAc}{EI} (1 + 2k_v), m_f = \frac{2}{EI} \lambda m m\varphi, P_f = \lambda P \cdot P_v$$

図4. 一般化吊橋部材の剛性マトリックス

5. 数値計算例

本回調査橋の一つである南備讃瀬戸大橋の端元を用いて2次元シフト吊橋の環令を解析し、ラートン法の結果と比較した¹⁾。荷重条件下に示した結果の比較は表1.2を行った。

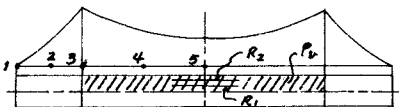


図5. 荷重条件

6. 参考文献

1) 本回調査報告書“吊橋のねじり解析”

着目点	たわみ (mm)		弦材軸力 (ton)	
	本法		ラートン法	
	1102 1104	1102 1104	1102 1104	1102 1104
1				
2	-0.364	-0.395	-0.361	-845.4
3				-789.8
4	0.568	0.571	0.522	-479.0
5	2.085	2.225	2.116	-538.8
				-488.5
				977.2
				900.2
				3244
				3343
				3299.8
				5104
				4991
				4948

表1. 結果の比較