

山梨大学工学部 正員 平島健一
清水建設(株) 正員 多田博義

1. 緒言

現実の構造物と形成する構造体とを基礎からこの構造物に作用する荷重と含めた、いわゆる構造環境には多くの不確定量があり、その主要なものとして統計的分布とする使用材料の変形形状、強度特性あるいは外荷重等が考えられる。したがって、近年、荷重および構造材料等の統計的バラッキと考慮し、確率論的手法を用いて安全性と合理的に決定しようとする関心が急速に高まってきている。一方、梁の横座屈は棒や板の座屈とは異なり、ほぼ梁の最大耐荷力を決定するから、構造物の設計上非常に重要な問題である。

本論文は以上のような観点にたつて、面内に単純曲げと受ける矩形断面の梁の横座屈について確率論的に検討したものであり、次のような二つのケースが考察されてくる。

- (1) 任意の初期たわみと有する矩形断面梁の横座屈問題
 - (2) 単純曲げと横荷重のCouplingと考慮した矩形断面梁の安全性
- ## 2. 任意の初期たわみと有する矩形梁の横座屈

Fig.1のように座標系 (X, Y, Z) および (ξ, η, ζ) と設けると、たわみ角 φ に関する基礎微分方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d^2 \varphi}{dZ^2} + k^2 \varphi = -k^2 W(x), \quad k^2 = \frac{M^2}{EI_y C} \quad (1)$$

== 1.、

$$W(x) = y_0 + \frac{EI_y}{M} \frac{d^2 u_0}{dZ^2}, \quad I_y = \frac{kb^3}{12}, \quad C = \frac{kb^3}{3} (1 - 0.630 \frac{b}{\lambda}) \quad (1')$$

u_0, v_0 および φ_0 はFig.1に示すような初期たわみおよびたわみ角である。(1)式と境界条件： $Z=0, \ell$ のとき $\varphi=0$ ……(2)のもとで解くと、Green関数 $G(x, t)$ を用いて次式のように求められる。

$$\varphi(x) = \int_0^\ell G(x, t) W(t) dt \quad (3)$$

== 1.、

$$G(x, t) = \begin{cases} G_1(x, t) = \frac{k}{\sin k\ell} \left\{ \sin kZ \sin k(\ell-t) \right\}, & Z < t \\ G_2(x, t) = \frac{k}{\sin k\ell} \left\{ \sin k(\ell-Z) \sin kt \right\}, & Z > t \end{cases} \quad (4)$$

とすると、製作された梁の初期たわみはrandomな形状となすと考えられるが、この梁の平均初期たわみが既知であるときには、平均付加たわみおよび平均自乗たわみの期待値は次式で計算される。

$$E[\varphi(x)] = \int_0^\ell G(x, t) E[W(t)] dt \quad (5)$$

$$E[\varphi^2(x)] = \int_0^\ell dt_1 \int_0^\ell dt_2 G(x, t_1) G(x, t_2) R_W(t_1, t_2) \quad (6)$$

== 1.、 $R_W(t_1, t_2)$ は $W(t)$ の自己相関関数である。

初期たわみ u_0, v_0, φ_0 のうち、 u_0 は両端($Z=0, \ell$)では零にならなければならない。

== 1.と考慮して、 φ_0 ：一定、 $u_0(Z) = \sigma \sin \frac{\pi}{\ell} Z$ と仮定すると、 $R_W(t_1, t_2)$ は

$$R_W(t_1, t_2) = (\varphi_0 - \sigma \frac{A}{k} \frac{\pi^2}{\ell^2} \sin \frac{\pi}{\ell} t_1) (\varphi_0 - \sigma \frac{A}{k} \frac{\pi^2}{\ell^2} \sin \frac{\pi}{\ell} t_2), \quad \frac{A}{k} = \frac{EI_y}{M} \quad (7)$$

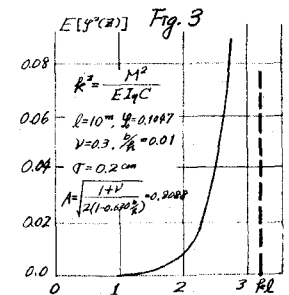
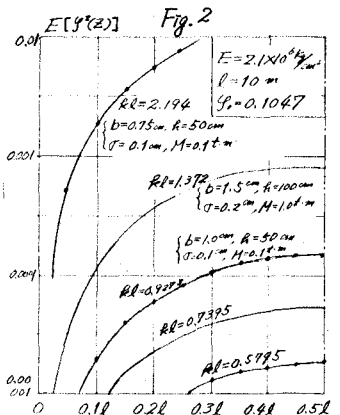
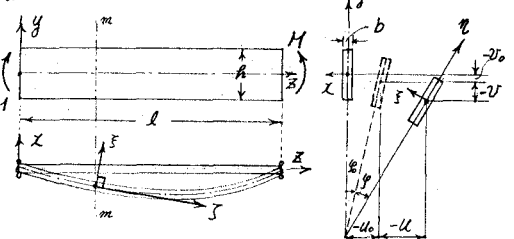
と書き表わされる。Green関数は自己相関関数の対称性を利用して(6)式は

$$E[\varphi^2(x)] = I_1^2 + 2I_1 I_2 + I_2^2, \quad \bar{k}_1 = k + \frac{\pi}{\ell}, \quad \bar{k}_2 = k - \frac{\pi}{\ell} \quad (8)$$

となす。== 1.、

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\varphi_0}{\sin k\ell} \sin k\ell \left\{ 1 - \cos k\ell \right\} + \frac{\sigma A \pi^2}{2 \ell^2} \frac{\sin k\ell}{\sin k\ell} \left\{ \frac{\sin \bar{k}_1 \bar{k}_2}{\bar{k}_1} - \frac{\sin \bar{k}_2 \bar{k}_1}{\bar{k}_2} \right\} \\ I_2 &= \frac{\varphi_0}{\sin k\ell} \sin k\ell \left\{ 1 - \cos k\ell \right\} + \frac{\sigma A \pi^2}{2 \ell^2} \frac{\sin k\ell}{\sin k\ell} \left\{ \frac{\sin(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \ell}{\bar{k}_2} - \frac{\sin(\bar{k}_2 - \bar{k}_1) \ell}{\bar{k}_1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8')$$

Fig. 1



平均自乗たわみ $E[y^2(x)]$ と梁の位置 z との関係が Fig. 2 に示されている。この図より、荷重パラメータ $kl = \frac{RM}{\sqrt{EI_y C}}$ が増加するにつれて、スパン上のすべての点で $E[y^2(x)]$ が増加している。Fig. 3 はスパン中央点の $E[y^2(z)]$ と kl の関数として表示したものであり、いわゆる決定論的に求めた座屈荷重よりはずが小さく、荷重と変形が大きくなることを示している。

初期たわみと表わす $W(z)$ が Gauss 分布で近似できると仮定した場合、変形に対する確率密度関数 $f(x, z)$ は次式：

$$f(x, z) = \frac{1}{\{2\pi E[y^2(z)]\}^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2E[y^2(z)]}\right) \quad (9)$$

で与えられるから $y(z)$ の値がある q_0 より大きくなる確率は次式となる。

$$Pr[y(z) > q_0] = 2 \int_{q_0}^{\infty} f(x, z) dx = \operatorname{erfc}\left\{\frac{q_0}{E[y^2(z)]^{1/2}}\right\} \quad (10)$$

梁の中央点での n の幾つかの値に対して計算したものが Fig. 4 である。

3. 複合荷重の Coupling を考慮した矩形梁の安全性

Fig. 5 のように複合荷重 (M と P_0) が作用する場合の基礎方程式は

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + k^2 y = -\frac{k^2 P_0 z}{M} (1-z) \quad (11)$$

となる。境界条件 (2) のもとで上式を解き、 z 軸のまわりの曲げモーメント M_y を求めると、 $M_y = EI_y \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{P_0}{k^2} (\tan \frac{kl}{2} \sin kRz + \cos kRz - 1)$ となる。 $M_{y \max}$ は $z = \frac{1}{2}$ で生じ、その値は、Taylor 展開し、座屈荷重 $M_0 (= \frac{\pi \sqrt{EI_y C}}{2})$ を用いて表わすと次式となる。

$$M_{y \max} = \frac{P_0 k^2}{8} + \frac{5L^4}{384 EI_y C} \frac{M^2 P_0}{1 - (M/M_0)^2} \quad (12)$$

したがって、面内曲げ M と横荷重 P_0 によって生じる最大曲げ応力 $\sigma_{\max}$ は次式：

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} + R_1 P_0 + R_2 \frac{M^2 P_0}{1 - (M/M_0)^2} ; M/M_0 < 1 \quad (13)$$

すなわち、 $W = I_y / y$, $R_1 = \frac{5}{8} W/L$, $R_2 = \frac{5L^3}{384 EI_y C W}$, $W_0 = I_y / z$, $I_y = \frac{bh^3}{12}$, $I_y = \frac{\pi b^3}{12}$ で求められる。ここで考える部材の破壊が単一のモード（ここでは横座屈による破壊）で生じるとし、部材応力 S と耐荷抵抗値 R が統計的に独立であるとすれば、破壊の確率 $P_f = Prob(R < S)$ は、 $F_2(S)$ の確率分布関数として

$$P_f = \int_0^{\infty} F_2(S) f_S(S) dS = \left(\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_{S,R}(S, R) dR dS \right) \quad (14)$$

が成立する。ここで、 S と R が対象としていた曲げ M と横荷重 P_0 は独立に作用するから、 M と P_0 の同時確率密度関数は次のようになる。

$$f_{M,P_0}(M, P_0) = f_M(M) \cdot f_{P_0}(P_0) \quad (15)$$

すなわち、 f_M , f_{P_0} は M , P_0 のそれぞれ単一の確率密度関数である。

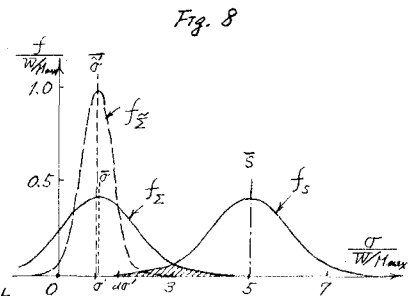
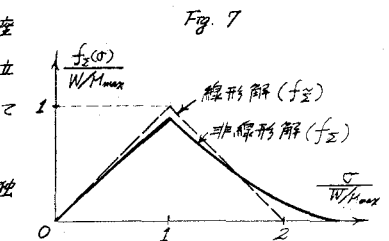
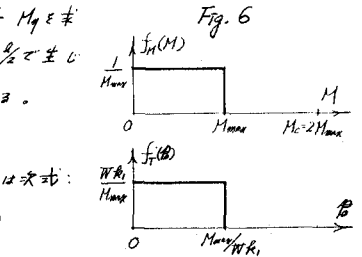
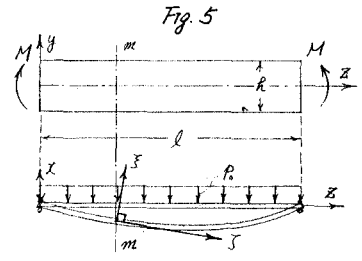
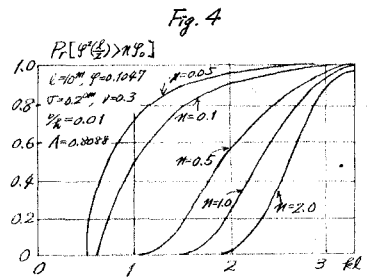
したがって、 σ が M と P_0 に対して単調に増加することを利用すれば、

$$f_2(\sigma) = \frac{d[F_2(\sigma)]}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma} \left[\int_0^B f_M(M) \left(\frac{\sigma - M/W}{R_1 + R_2 \frac{M^2}{1 - (M/M_0)^2}} \right) f_{P_0}(P_0) dP_0 \right] \quad (16)$$

$$: f_2(\sigma) = \int_0^B f_M(M) f_{P_0} \left(\frac{\sigma - M/W}{R_1 + R_2 \frac{M^2}{1 - (M/M_0)^2}} \right) \cdot \frac{dM}{R_1 + R_2 \frac{M^2}{1 - (M/M_0)^2}} \quad (16')$$

ここで、 B の値は $\sigma \leq M_0/W$ のとき $B = W\sigma$, $\sigma > M_0/W$ のとき $B = M_0$ 。

次に、曲げ応力の確率密度関数と具体的に計算する。ここで Fig. 6 を表わすように、 M と P_0 が一様に分布しているものととし、また、(13) の上限は曲げ M による荷重座屈が横荷重によるものと一致するように定めるものとする。ここで $M_{\max} = \frac{1}{2} M_0$ とする。



参考文献：1) S.P. Timoshenko and J.M. Gere "Theory of Elastic Stability" 2nd Ed. Kogakusha (1961) pp. 251~269
2) R.G. Jacquot: "Nonstationary Random Column Buckling Problem", Jour. EM Div., Proc. ASCE (1972), pp. 1173~1182.
3) C.B. Brown and R.J. Evans: "Safety of An Elastic Beam-Column", Jour. EM Div., Proc. ASCE (1972), pp. 805~812