# I-173 橋梁の信頼性に関する一考察

金沢大学工学部　正会員　小堀為雄
石川高専　正会員　○出村禧典

## 1．まえがき

普通構造物の信頼性は荷重のばらつきと強度のばらつきの関係において考察されているが，一般に荷重のばらつきは強度のばらつきに比べて大きく，信頼性は荷重によって支配されてしまう。しかし個々の橋梁の安全性に注目して信頼性を考える場合は荷重にランダム性を考えるよりもむしろ特殊な荷重状態について考慮し，構造解析や載荷実験などによって構造物に生じる応力を推定する際の誤差と強度のばらつきに対して信頼度を考えた方が合理的な場合がある。昨年度の年次講演においては，載荷実験の際の誤差の問題と橋梁の特殊条件である荷重の移動性を考慮した破壊確率の1つの計算方法について発表したが次の点についてさらに研究を進めたのでここで発表する。1）載荷実験によって生じる誤差を構造解析における諸仮定から生じる誤差とともに荷重を応力レベルまで変換するときの変換誤差として取らえる（Fig.1参照）。2）橋梁の強度のばらつきや変換誤差を考慮するために強度R，応力Sを確率変量として取り扱いそれぞれに密度関数を考えるが，その密度関数は移動によって生じる応力状態を考慮しつつ修正していくことによってproof-loadの考え方を導入する。3）不連続的な取り扱いを連続的な取り扱いに拡張する。

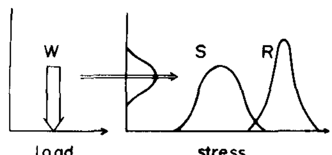

Fig.1

## 2．移動荷重による破壊確率の計算

Fig.2に示されるような大きさ$W_m$なる移動荷重が載荷され，支点Aから支点Bに向って移動するものとする。いま梁は全スパンにわたって等断面で強度Rも同一でそのばらつきも完全に相関があると考える。荷重が支点Aより$\zeta$だけ離れた点にあるときに梁に生じる応力のうちの最大応力を$S_m(\zeta)$とすると次式の条件が満足されるとその梁は破壊する。

$$S_m(\zeta) < R \qquad \text{------- (1)}$$

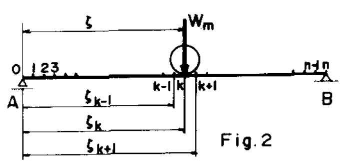

Fig.2

そこで$Z$を荷重の載荷点の支点Aからの距離とし，スパンをFig.2に示すように$n$個に等分割しきざみ値を$\Delta\zeta$とする。いま$L_z(\zeta_k)$を荷重が$\zeta_k$に達するまで破壊しない確率とすれば，

$$L_z(\zeta_k) = P(Z > \zeta_k) \qquad \text{------ (2)}$$

また荷重が$\zeta_k$に到達するまでに破壊する確率を$F_z(\zeta_k)$とすれば，

$$F_z(\zeta_k) = P(Z \leq \zeta_k) = 1 - L_z(\zeta_k) \qquad \text{------ (3)}$$

さらに荷重がちょうど$\zeta_{k-1}$より$\zeta_k$移動する間に破壊する平均破壊確率を$f_z(\zeta_k)$とすれば，

$$f_z(\zeta_k) = P(\zeta_{k-1} < Z \leq \zeta_k)/\Delta\zeta = \{F_z(\zeta_k) - F_z(\zeta_{k-1})\}/\Delta\zeta \qquad \text{--- (4)}$$

$h_z(\zeta_k)$を荷重が$\zeta_{k-1}$に到達しないうちは破壊しなく$\zeta_{k-1}$から$\zeta_k$へ移動する際に破壊する平均確率とすると，

$$\begin{aligned} h_z(\zeta_k) &= P(\zeta_{k-1} < Z \leq \zeta_k \mid Z > \zeta_{k-1})/\Delta\zeta \\ &= P\{(\zeta_{k-1} < Z \leq \zeta_k) \cap (Z > \zeta_{k-1})\}/\{P(Z > \zeta_{k-1}) \cdot \Delta\zeta\} \\ &= f_z(\zeta_k)/L_z(\zeta_{k-1}) \end{aligned} \qquad \text{------ (5)}$$

また（5）式より次の関係式が得られる。

$$f_z(\zeta_k) = L_z(\zeta_{k-1}) \cdot h(\zeta_k) \qquad \text{------ (6)}$$

以上（2）式から（6）式を$\Delta\zeta$を微少にし，$\zeta$なる連続変数に置けば，

$$f_z(\zeta)=dF_z(\zeta)/d\zeta=-dL_z(\zeta)/d\zeta \quad \text{-----} \ (7)$$

$$h_z(\zeta)=\frac{f_z(\zeta)}{L_z(\zeta)}=\frac{-dL_z(\zeta)}{L_z(\zeta)d\zeta}=-\frac{d\ln L_z(\zeta)}{d\zeta} \quad \text{----} \ (8)$$

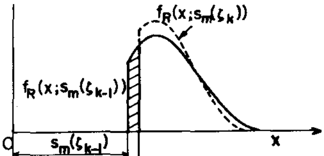

Fig.3

そして移動荷重が梁を通過し終った破壊確率（次式参照）が移動荷重によるその梁の破壊確率となる。$\ell$をスパン長とし，$\zeta=\ell$と置けば，

$$F_z(\ell)=\sum_{k=1}^{n} f_z(\zeta_k)\Delta\zeta=\int_0^{\ell} f_z(\zeta)d\zeta \quad \text{---------} \ (9)$$

次に不連続な場合の$h_z(\zeta_k)$の計算であるが，まず変換誤差がないすなわち応力が確定量の場合を考える。強度Rのばらつきを表わす密度関数をFig.3に示すように$f_R\{x;s_m(\zeta_{k-1})\}$とする。$x$は強度を表わす確率変数とし，$s_m(\zeta_{k-1})$は$x>s_m(\zeta_{k-1})$なる確率変数の条件を示す。すなわち$h_z(\zeta_k)$は荷重が$\zeta_{k-1}$に達しても破壊しない場合に初めて計算されるから$s_m(\zeta_{k-1})$以下の強度は存在しない。

$$h_z(\zeta_k)=\frac{1}{\Delta\zeta}\int_{s_m(\zeta_{k-1})}^{s_m(\zeta_k)} f_R\{x;s_m(\zeta_{k-1})\}dx \quad \text{-----} \ (10)$$

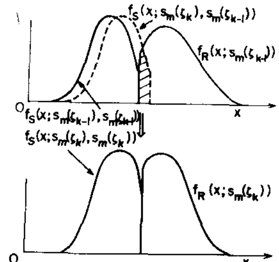

Fig.4

そして$h_z(\zeta_{k+1})$の計算では強度の密度関数は修正され$f_R\{x;s_m(\zeta_k)\}$を使用する（Fig.3参照）。また応力の変換誤差も考慮する場合は応力に次のような密度関数$f_S\{x;s_m(\zeta_{k-1}),s_m(\zeta_{k-1})\}$を考える。初めの$s_m(\zeta_{k-1})$は分布の形状を決定する応力状態を示す要素で，$s_m$の平均値などで，後者は前述の場合と同じく確率変数の条件を示す。$h_z(\zeta_k)$の計算は，初めは応力と強度の密度関数は重なり合っていなく，荷重が$\zeta_{k-1}$から$\zeta_k$に移動したために応力状態が変化し重なり合った部分が生じ確率が計算される（Fig.4参照）。

$$h_z(\zeta_k)=\frac{1}{\Delta\zeta}\int_{s_m(\zeta_{k-1})}^{s_m(\zeta_k)}\int_{x}^{s_m(\zeta_k)} f_S\{\lambda;s_m(\zeta_k),s_m(\zeta_{k-1})\}\cdot f_R\{x;s_m(\zeta_{k-1})\}d\lambda\,dx \quad \text{-------} \ (11)$$

さらに$h_z(\zeta_{k+1})$についてはFig.4の下部に示すように密度関数を修正する。

## 4. 計算結果

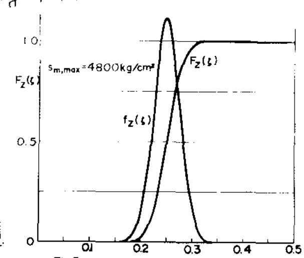

Fig5

Fig.5, 6は変換誤差を無視した場合の計算結果で，Fig.7は変換誤差も考慮した場合の結果である。密度関数には正規分布を用いている。図中の$s_{m,max}$は$s_m$の中の最大値であり，実際には荷重が中央点（$\zeta=\ell/0.5$）に達したときの$s_m$である。$\bar{s}_{m,max}$は応力の密度関数において応力状態を示す代表値に$s_m$の平均値をとった場合のその最大値を示す。なお強度，応力の分布の変動係数は0.1で，強度の平均値$\bar{r}_y=2400$ kg/cm²である。ここに一例としてFig.5の計算に用いた強度Rの密度関数を示す。$H\{x\}$はステップ関数である。

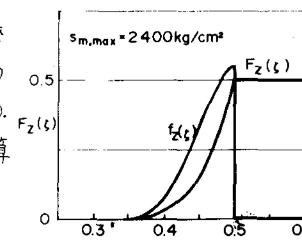

Fig6

$$f_R\{x;s_m(\zeta_{k-1})\}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{r_y}}e^{-\frac{(x-\bar{r}_y)^2}{2\sigma_y^2}}\cdot H\{x-s_m(\zeta_{k-1})\}}{\int_0^{s_m(\zeta_{k-1})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{r_y}}e^{-\frac{(\lambda-\bar{r}_y)^2}{2\sigma_{r_y}^2}}d\lambda} \quad \text{----------} \ (12)$$

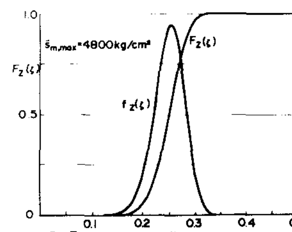

Fig7

計算結果をみると，応力が大きい場合は中央点と支点の中間で破壊の可能性が大きいことを示し，小さい場合は中央点が最も大きくそれを過ぎると破壊確率が0になる。Fig.5の$f_z(\zeta)$は対称であるが，Fig.7は若干異なる。


参考文献 1）小堀，出村"トラスの信頼性について"四十八年度年次講演会
2）M. Shinozuka "Methods of Safety and Reliability Analysis" Technical Report No.1