

1. まえがき

才28回年次学術講演会において、筆者は軸力を受ける棒部材は軸剛性の他に横剛性を有し、その横剛性は弦および単振子の復元力剛性を表わすこと、又その剛性方程式から作られるケーブルの基礎方程式は、線形化された Melan の式になることを示した。しかしながらこの誘導には一部誤りがあり、その後の検討の結果吊橋の新しい鉛直方向釣合方程式を得た。又吊橋のエネルギ法に対する新しい式を誘導することができた。このエネルギー表示式は従来ケーブルに対して提案された種々の式とも含するものである。これらの結果は現在吊橋の動的解析などに対して行っている線形化有限変形法に対して理論的根拠を与えると共に橋度理論の位置づけに役立つものと思われる。

2. ケーブルの剛性方程式と節点の釣合

図1に表わされる吊橋の形状において、簡単のためハンガーの斜め効果と無視すると死荷重時の*i*節点での釣合は

$$H_{bi-1} + H_{wai} = 0 \quad (1a)$$

$$V_{bi-1} + V_{wai} + W_{ci} + R_{wi} = 0 \quad (1b)$$

又変形後の釣合は

$$H_{bi-1} + H_{ai} = 0 \quad (2a)$$

$$V_{bi-1} + V_{ai} + W_{ci} + R_{ai} = 0 \quad (2b)$$

となる。式(2a), (2b)に死荷重位置で Taylor 展開を行うと

$$H_{bi-1} + dH_{bi-1} + H_{wai} + dH_{wai} + O(2) = 0 \quad (3a)$$

$$V_{bi-1} + dV_{bi-1} + V_{wai} + dV_{wai} + W_{ci} + R_{wi} + dR_{wi} + O(2) = 0 \quad (3b)$$

を得る。今次の仮定と設ける。仮定1 Taylor 展開の2次の微小項は無視する。仮定1と式(1), (3)から

$$dH_{bi-1} + dH_{ai} = 0 \quad (4a)$$

$$dV_{bi-1} + dV_{ai} + dR_{ai} = 0 \quad (4b)$$

ただし

$$dF = k \, dX \quad (5)$$

$$dF = [dH_{ai}, dV_{ai}, dH_{bi}, dV_{bi}]^T, \quad dX = [dx_{ai}, dy_{ai}, dx_{bi}, dy_{bi}]^T$$

$$k = \begin{bmatrix} k_{c1} & -k_{c2} \\ -k_{c2} & k_{c1} \end{bmatrix} \quad k_{c1} = \begin{bmatrix} -k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad k_{11} = \frac{AcEc}{L_0} \cos^2 \alpha + \frac{TW}{L} \sin^2 \alpha$$

$$k_{12} = k_{21} = \left(\frac{AcEc}{L_0} - \frac{TW}{L} \right) \sin \alpha \cos \alpha, \quad k_{22} = \frac{AcEc}{L_0} \sin^2 \alpha + \frac{TW}{L} \cos^2 \alpha$$

3. ケーブル方程式の誘導

式(4a)と(5)から次式を得る。

$$dH_{bi} = \text{const.} (= dH) = -dH_{ai} = -k_{11}(dx_{ai} - dx_{bi}) - k_{12}(dy_{ai} - dy_{bi}) \quad (6)$$

式(6)の両辺を k_{11} で割り、両辺を全節点について加え合せると次式を得る。

$$dH \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_{11}} - \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{k_{12}}{k_{11}} - \frac{k_{21}}{k_{11}} \right) dy_i = 0 \quad (7)$$

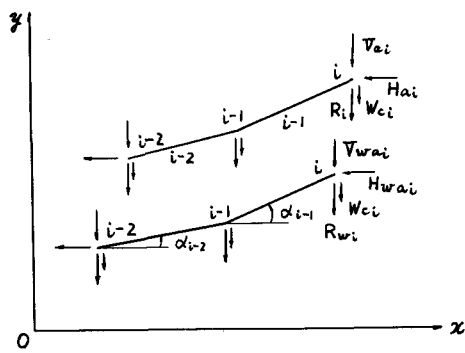


図1 ケーブルの形状

各係数式(5)で計算し、 $\Delta x \simeq L_0 \cos \alpha$ であることをE利用し、境界条件E入れ、 $\Delta x \rightarrow 0$ とすると

$$\frac{H_p}{A_c E_c} \int_0^c \sec^2 \alpha dx + \frac{d^2 y}{dx^2} \int_0^c \eta dx - \frac{H_w}{A_c E_c} \int_0^c \frac{d}{dx} (\tan \alpha \sec^2 \alpha) dx = 0 \quad (8)$$

を得る。但し $dH = H_p$, $\eta = dy$ と書き直している。

4. 吊橋の鉛直方向釣合式の誘導

式(6)と式(5)から次式を得る。

$$\begin{aligned} dV_{ai} &= - \frac{k_{zi}}{k_{ni}} dH - \frac{k_{zi}^2 - k_{ni} k_{zzi}}{k_{ni}} (dy_i - dy_{i+1}) \\ &= - dH (\tan \alpha_i - \frac{H_w}{A_c E_c} \tan \alpha_i \sec^2 \alpha_i) - H_w (\sec^2 \alpha_i - \frac{H_w}{A_c E_c} \tan^2 \alpha_i \sec^2 \alpha_i) \frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x} \quad (9) \end{aligned}$$

式(5)と式(4b)より

$$dV_{ai} - dV_{i-1} = \Delta dV_{ai} = -dR_i \quad (10)$$

式(10)に式(9)を代入し、ハンガーと桁との釣合と考慮すると $\Delta x \rightarrow 0$ の時次式が得られる。

$$E_s I_v \frac{d^2 \eta}{dx^2} - H_w \frac{d}{dx} \left\{ (\sec^2 \alpha - \frac{H_w}{A_c E_c} \tan^2 \alpha \sec^2 \alpha) \frac{d\eta}{dx} \right\} - H_p \left\{ \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{H_w}{A_c E_c} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \sec^2 \alpha \right) \right\} = p \quad (11)$$

式(11)では横度理論の慣習に合せてy軸を下向きに正に変換している。又式(10)を変換することによって2ヒンジ吊橋に対して次式も得られる。この式でもy軸を下向きを正に変換している。

$$M = M_0 - H_p \int_0^x \left(1 - \frac{H_w}{A_c E_c} \sec^2 \alpha \right) \frac{dy}{dx} dx - H_w \int_0^x \sec^2 \alpha \left(1 - \frac{H_w}{A_c E_c} \tan^2 \alpha \sec^2 \alpha \right) \frac{d\eta}{dx} dx \quad (12)$$

ここに M_0 は単純桁の曲げモーメントである。

5. エネルギー表示式

微小区間 Δx に貯えられるケーブルのエネルギーは仮想仕事の原理より

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2} \Delta F^T \Delta x = \frac{1}{2} \Delta x^T k \Delta x \\ &= \left(\frac{A_c E_c}{\Delta x} \cos^2 \alpha + \frac{H_w}{\Delta x} \sin^2 \alpha \right) (\Delta \xi_i)^2 + \left(\frac{A_c E_c}{\Delta x} \cos \alpha \sin^2 \alpha + \frac{H_w}{\Delta x} \cos^3 \alpha \right) (\Delta \xi_i) (\Delta \eta_i) \\ &\quad + \left(\frac{A_c E_c \cos \alpha}{\Delta x} - \frac{H_w}{\Delta x} \right) 2 \sin \alpha \cos \alpha \Delta \xi_i \Delta \eta_i \quad (13) \end{aligned}$$

従って全エネルギーは次式となる。ここに ξ は水平変位である。

$$U = \sum \Delta U \rightarrow \int_0^c A_c E_c \cos^2 \alpha \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{d\eta}{dx} \right) dx + \int_0^c H_w \cos^2 \alpha \left(\frac{d\xi}{dx} \frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dx} \right) dx \quad (14)$$

H_p を保留しにまき誘導すると次式が得られる。但し $K_i = T_i L_i / (A_c E_c L_0)$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{1}{A_c E_c} (1 - K_i \tan^2 \alpha_i) \sec^2 \alpha_i H_p^2 \Delta x + \frac{1}{2} H_w (\sec^2 \alpha_i - \frac{H_w}{A_c E_c} \frac{\tan^2 \alpha_i}{\cos^2 \alpha_i}) \frac{(\Delta \eta_i)^2}{\Delta x} \quad (15)$$

$$\therefore U \simeq \frac{1}{2} \frac{1}{A_c E_c} \int_0^c H_p^2 \sec^2 \alpha dx + \frac{H_w}{2} \int_0^c \sec^2 \alpha \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 dx \quad (16)$$

$$\text{但し、} \frac{H_p}{A_c E_c} \int_0^c \sec^2 \alpha dx + \frac{d^2 y}{dx^2} \int_0^c \eta dx = 0 \quad (H_p = \text{const. の場合}) \quad (17)$$

6. 考察

式(8)は *Salberg* の誘導した式の3項まで一致している。式(11)で $H_w / A_c E_c$ に関する項を無視すると

$$E_s I_v \frac{d^2 \eta}{dx^2} - H_w \frac{d}{dx} (\sec^2 \alpha \cdot \frac{d\eta}{dx}) - H_p \frac{d^2 y}{dx^2} = p \quad (18)$$

が得られ、この式は線形化された *Rode* の式となる。更に仮定 $\sec^2 \alpha \simeq 1$ を採用すると線形化された *melan* の式が得られる。式(16)は H_p が定数でない場合も含む。式(16)で $H_p = \text{const.}$ とすると式(17)より

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{A_c E_c}{L_E} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \left\{ \int_0^c \eta dx \right\}^2 + H_w \int_0^c \sec^2 \alpha \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 dx \right], \quad L_E = \int_0^c \sec^2 \alpha dx \quad (19)$$

となる。なお横方向に対する釣合式も式(5)より誘導できるが省略する。

7. 参考文献

- (1) 林有一郎, 保田雅彦, “吊橋の振動解析”, 土木学会第28回年次学術講演会概要集