I-119　側方から集中的に分布する圧力を受ける矩形平板の弾性座屈について

北海道大学　正員　能町　純雄
北海道大学　正員　○堺　孝司

1. まえがき　本報告は，矩形平板の側方から中央小区間に等分布する力が面内に作用する場合の弾性座屈挙動を考察したものである。その応力分布は，図.1に示す如く，無限体に分布幅2Cなる力が作用する場合のものを用いる。境界でも，応力分布が外力として面内に作用し，面内力は全体として釣り合っている。

平板の座屈問題を扱うには，種々の方法があるが，ここでは，重調和微分式に対するGreenの公式を用いてFredholmの積分方程式によるものである。

2. 分布幅2Cなる力が作用する場合の応力分布[1]

図.1を参照して

$$\sigma_x = -\frac{\sigma_0}{2\pi}\{2(\theta_1-\theta_2) - 2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

$$\sigma_y = -\frac{\sigma_0}{2\pi}\{2(\theta_1-\theta_2) + 2\cos(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_0}{2\pi}\{\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1\}$$

ただし　$\theta_1 = \tan^{-1}\{\frac{1}{y}(x-\frac{a}{2}-c)\}$, $\theta_2 = \tan^{-1}\{\frac{1}{y}(x-\frac{a}{2}+c)\}$

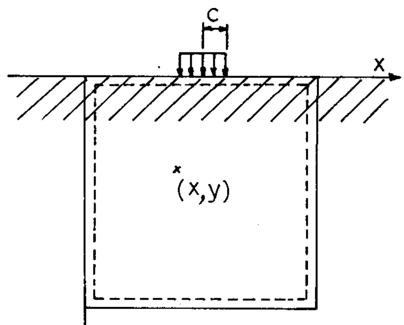

図.1

3. 重調和微分式のGreen積分[2]

Wの重調和微分式に対するGreenの積分は，次のように書ける。

$$\int_0^a\int_0^b\{(\Delta^2W)\cdot U - (\Delta^2U)\cdot W\}\,dx\,dy = R(W\cdot U) \quad\text{—— (1)}$$

ただし　$\Delta^2 = \partial^4/\partial x^4 + 2\partial^4/\partial x^2\partial y^2 + \partial^4/\partial y^4$

$$\begin{aligned}R(W\cdot U) = &\int_0^b\Big[\Big\{\frac{\partial^3W}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3W}{\partial x\partial y^2}\Big\}U\Big]_{x=0}^{x=a}dy - \int_0^b\Big[\Big\{\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\Big\}\frac{\partial U}{\partial x}\Big]_{x=0}^{x=a}dy \\ &+\int_0^b\Big[\Big\{\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\Big\}\frac{\partial W}{\partial x}\Big]_{x=0}^{x=a}dy - \int_0^b\Big[\Big\{\frac{\partial^3U}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3U}{\partial x\partial y^2}\Big\}W\Big]_{x=0}^{x=a}dy + \int_0^a\Big[\Big\{\frac{\partial^3W}{\partial y^3}+(2-\nu)\times \\ &\times\frac{\partial^3W}{\partial x^2\partial y}\Big\}U\Big]_{y=0}^{y=b}dx - \int_0^a\Big[\Big\{\frac{\partial^2W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\Big\}\frac{\partial U}{\partial y}\Big]_{y=0}^{y=b}dx + \int_0^a\Big[\Big\{\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\Big\}\frac{\partial W}{\partial y}\Big]_{y=0}^{y=b}dx \\ &-\int_0^a\Big[\Big\{\frac{\partial^3W}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3U}{\partial x^2\partial y}\Big\}W\Big]_{y=0}^{y=b}dx - 2(1-\nu)\Big[\Big[\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}U - \frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}W\Big]_0^a\Big]_0^b\end{aligned}$$

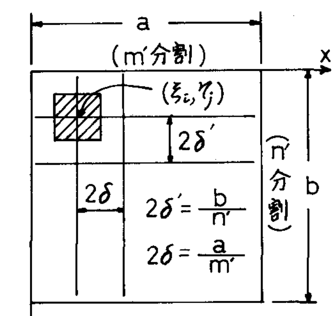

図.2

又，(0, a)，(0, b) なる矩形領域で積分可能な関数Wについて次のようなフーリエ正弦変換を定義しておく。

$$S_mS_n[W] = \int_0^a\int_0^b W\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \cdots,\quad a>x>0,\ b>y>0)$$

C \ K	K_1	K_2	K_3	P_1	P_2	P_3
1.0 cm	12.9	25.1	39.2	25.8	50.2	78.4
0.5 〃	25.2	48.4	73.5	25.2	48.4	73.5
0.1 〃	125.0	236.5	353.9	25.0	47.3	70.8

a=b=10 cm　t=0.1 cm　Table.1

4. 四辺単純支持の矩形板

たわみをW，曲げ剛性をDとすれば，平板の座屈微分方程式は

$$\Delta^2W = -\frac{1}{D}(N\cdot W) \quad\text{—— (2)}$$

ただし $(N\cdot W)=t\left(\sigma_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\sigma_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+2\tau_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)$

である。さて(1)式に $u=\sin m\pi x/a\cdot\sin n\pi y/b$, $R(W\cdot u)=0$, 及び(2)の関係を代入すれば,

$$S_mS_n[W]=\frac{-1}{D\{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2\}^2}\cdot S_mS_n[(N\cdot W)]$$

逆変換して

$$W=-\frac{1}{D}\int_0^a\int_0^b (N\cdot W)\cdot G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta \quad \text{—— (3)}$$

ここで

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n \frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\{(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2\}^2}$$

従って,

$$(N\cdot W)=N_x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}$$

$$=-\frac{1}{D}\int_0^a\int_0^b (N\cdot W)\cdot\left[\frac{\partial^2 G(x,y,\xi,\eta)}{\partial y^2}N_y+\frac{\partial^2 G(x,y,\xi,\eta)}{\partial x^2}N_x+\frac{\partial^2 G(x,y,\xi,\eta)}{\partial x\partial y}N_{xy}\right]d\xi\, d\eta \quad \text{—— (4)}$$

一般に, このままでは収束性に問題があるので, nについて閉じた形にしておく。紙面の都合上, それにはふれない。

(4)式は, 一般的に

$$F(x,y)=\int_0^a\int_0^b K'(x,y,\xi,\eta)\cdot F(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta \quad \text{—— (5)}$$

と記せる。これが求める固有値方程式であり, 実際には, 図2に示すように数値積分して求める。

5. 数値計算

図3に, $a=10$cm, $b=10$cm, $C=1$cm の場合の応力分布σ_x, σ_y, τ_{xy}を示す。図4には, この時の1次から3次までの座屈モード等高線を示す。

又,表1に示すように, Cを小さくすると, 座屈強度$P=2C\cdot K\cdot\sigma_e$ (K;座屈値, σ_e;オイラーの座屈応力)は,一定値($C=0.1$cmのときで,ほぼ一定)に近づく。 計算では, $m'=n'=10$分割, $m=15$項(nについては閉じた形にしてある) までとって計算したが, 既知解に対する精度チェックにおいて0.38%の誤差であった。これに対する差分法では, 同じ10分割に対して0.82%の誤差となる。更に, 荷重作用辺が自由なる境界条件の場合についても検討中である。

尚, 計算には, 北大大型計算機センター－FACOM 230-60を使用した。

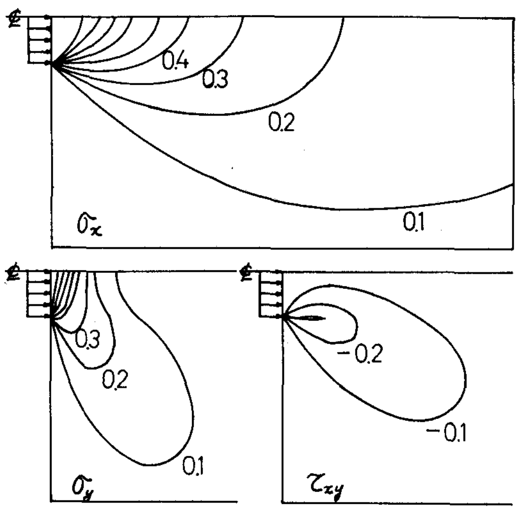

図.3　(×σ0)

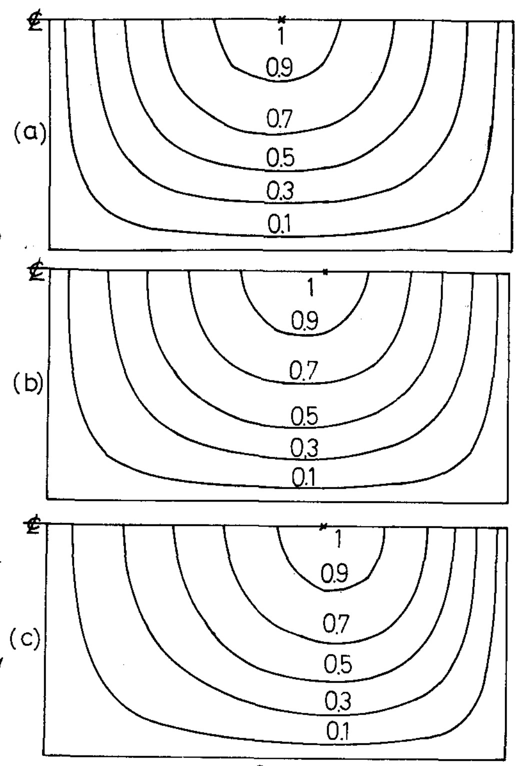

図.4

(参考文献)

(1). Fourier Transforms ; IAN N. SNEDDON, McGRAW-HILL, 1951

(2) 弾性基礎上にある四辺, 四隅自由な矩形板の曲げについて; 能町純雄, 土木学会論文集第32号