

山梨大学工学部 正員 平島健一

三菱重工業(株) 正員 桑原秀夫

1. 緒言

軸方向圧縮荷重と受ける異方性板の座屈解析も従来から数多くなされてゐる。そのうち、断面要素のせん断変形と考慮に入れた研究経過は以下のものである。すなわち、Reissner¹⁾は直交異方性の弾性板に於て座屈問題と取り扱つてゐるが、彼の考慮したせん断変形は厚さ方向の単せん断変形であり、中央面の法線の回転は含まれておらず、厚さ方向のせん断応力と平均化して等分布とした関係式が用ゐられてゐる。BertおよびChang²⁾は中央面の法線の回転をも含めたせん断変形にまで拡張したが、Reissner理論と同様なせん断応力の近似化と行なつてゐる。また、一方、Ambartsunyan³⁾は板厚方向のせん断応力を放物線分布と仮定することによってさういふ構成方程式を用ゐ、直交異方性板の座屈を考えたが、Reissnerの場合と同様にせん断変形に中央面の法線の回転は考慮しなかつた。したがつて、ここではBert・Chang²⁾と同様に単せん断変形と中央面の法線の回転とを考慮し、さらに、厚さ方向のせん断応力を放物線分布としてさういふ構成方程式を用ゐて直交異方性板の座屈理論の拡張を行ない、応用例として一方向軸圧縮力と受ける四辺単純支持の直交異方性板の座屈問題と取りあげ、各種理論との関係と比較検討する。なお、基礎方程式と導くに當つて、以下のような仮定を設ける。

- ① たわみ、たわみ角は充分小さく、したがつて中央面のひずみと曲率との線形関係が成立する。② 材質は直交異方性の完全弾性体である。板厚は一定である。③ 異方性の主軸は板の辺に平行である。④ 変形後も板厚は変化しない。

2. 基礎方程式

Fig.1(a)は断面力と表示した板の矩形微小要素であり、Fig.1(b)はxy平面内でのこの微小要素の変形後の断面形状である。この図より次のような釣合²⁾方程式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - g - N_x \frac{\partial \beta_x}{\partial x} - N_y \frac{\partial \beta_y}{\partial y} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + N_x \gamma_x &= 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y + N_y \gamma_y = 0. \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

曲げ変形ならびにせん断変形後の角度向には次の関係がある。

$$-\frac{\partial w}{\partial x} = \beta_x - \gamma_x, \quad -\frac{\partial w}{\partial y} = \beta_y - \gamma_y \dots (2)$$

また、断面力と変形 w, β, γ の間には次式のような構成関係が存在する³⁾。

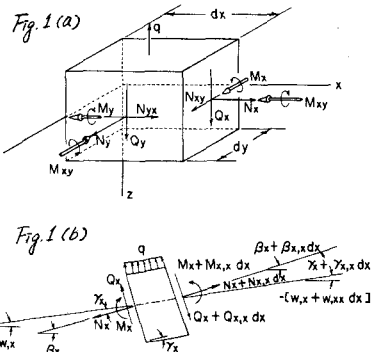
$$\left. \begin{aligned} M_x &= D_x \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{6}{5} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \nu_{yx} \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) \right\}, \quad M_y = D_y \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{6}{5} \left(\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \nu_{xy} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) \right\}, \\ M_{xy} &= D_{xy} \left\{ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{6}{5} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right) \right\}, \quad Q_x = S_x \gamma_x, \quad Q_y = S_y \gamma_y; \quad S_x, S_y: \text{単位幅当り厚さ方向せん断弾性係数} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

(2), (3) 式の関係と(1)式に代入して整理すれば、 w, γ_x, γ_y に関する次式のような基礎微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (S_x - N_x) \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + (S_y - N_y) \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} - g &= 0, \\ D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_x \nu_{yx} + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{6}{5} \left\{ D_x \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial y^2} + (\nu_{yx} D_x + D_{xy}) \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x \partial y} \right\} + (S_x - N_x) \gamma_x &= 0, \\ D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_y \nu_{xy} + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{6}{5} \left\{ D_y \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x^2} + (\nu_{xy} D_y + D_{xy}) \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial y} \right\} + (S_y - N_y) \gamma_y &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

3. 直交異方性矩形板の座屈解析

四辺単純支持の矩形板のx軸に平行な方向にのみ軸圧縮力 $N_x (= P_x)$ と受ける直交異方性平板の座屈問題を考えよう。たわみ w 、せん断変形 γ_x および γ_y と境界条件と満足するように、それを次のように仮定する²⁾。



$$\left. \begin{aligned} W &= W \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad \bar{\gamma}_x = \bar{\gamma}_x \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \bar{\gamma}_y &= \bar{\gamma}_y \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

==に、 a, b はそれぞれ x, y 軸方向の板の長さであり、また、 m, n は x, y 方向の変形モードの半波長の数と表わしており、座屈荷重の最小値は y 方向に $n=1$ 、すなわち、常に $1/2$ 波長のときと生じる。
後の数値解析の便のため、次の無次元パラメータを導入する。

$$\lambda = \left(\frac{a}{mb}\right)^2, \quad \bar{J} = \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}, \quad \psi = \frac{D_{xy}}{D}, \quad \bar{D} = \sqrt{D_x D_y}, \quad R = \frac{b^2}{\pi^2 \bar{D}} P_x, \quad s_x = \frac{S_x R}{P_x}, \quad s_y = \frac{S_y R}{P_x}, \quad \eta = \lambda \bar{J} + 2\psi \dots (6)$$

(5)式を基礎方程式(4)に代入し、得られた特性方程式を整理して、行列表示すれば、次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} R & -\frac{(S_x + R)}{\lambda^{1/2}} & -S_y \\ -\frac{(1 + \bar{J}\lambda\eta)}{\bar{J}\lambda^{1/2}} & R + S_x + \frac{6}{5}\left(\frac{1}{\bar{J}\lambda} + \psi\right) & \frac{6}{5}\frac{(\eta - \psi)}{\lambda^{1/2}} \\ -(J\lambda + \eta) & \frac{6}{5}\frac{(\eta - \psi)}{\lambda^{1/2}} & \frac{6}{5}\left(J + \frac{\psi}{\lambda}\right) + S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ \bar{\gamma}_x \\ \bar{\gamma}_y \end{bmatrix} = 0 \dots (7)$$

上式の未知量 $W, \bar{\gamma}_x, \bar{\gamma}_y$ が非自明解となるためには係数行列式が零とならなければならない。=より不安定化条件は座屈係数 R に対して次のような関係式によって表わされる。
$$R = -\frac{(Q - \sqrt{Q^2 - 4PR})}{2P} \dots (8)$$

$$\begin{aligned} &==に、 \\ &P = \frac{6}{5}\left(J + \frac{\psi}{\lambda}\right) + S_y, \\ &Q = P\left\{\frac{6}{5}\left(\frac{1}{\bar{J}\lambda} + \psi\right) + S_x\right\} + \frac{6}{5}\frac{(J\lambda + \eta)(\eta - \psi)}{\lambda} - P \cdot \frac{(1 + \bar{J}\lambda\eta)}{\bar{J}\lambda} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 \frac{(\eta - \psi)^2}{\lambda} - (J\lambda + \eta)S_y, \\ &R = (J\lambda + \eta)\left\{\frac{6}{5}\frac{\eta - \psi}{\lambda} S_x - S_y\right\} + \frac{6}{5}\frac{(1 + \bar{J}\lambda\eta)}{\bar{J}\lambda} \left\{\frac{6}{5}S_y(\eta - \psi) - S_x P\right\}. \end{aligned} \dots (9)$$

(9)式あるいは(8)式の係数に特殊な値と代入することによって、せん断変形と無視したもの、等方性板の場合のもの、あるいは諸言と述べた各研究者の理論式と一致する。

4. 数値計算例

Fig.2は無次元パラメータ $\psi=0.2, \eta=0.6, \bar{J}=0.67, S_x/S_y=2.5$ の場合のそれぞれ理論による座屈係数 R が図示されている。この図よりReissner理論とAmbartsumyan理論、ならびにBert Chang理論と本論とをそれぞれ類似の曲線であるが、せん断応力と放物線分布と仮定する構成方程式を用いたAmbartsumyan理論および本論の方が低い値を示す。 $m=1, 1/s_x=0.2$ の場合の R の最小値に関して、Reissner理論とAmbartsumyan理論では約6%、Bert Chang理論と本論とでは約5%の差異が認められる。Fig.3およびFig.4も各種理論による R 値の比較は s_x に $1/b, S_x/S_y$ とパラメータとして描いた図面である。詳細は紙面の都合上、省略する。

5. 結言

その他の計算例、実験データとの比較、せん断補正係数 K の座屈係数 R に及ぼす影響等に対する考察については講演会当日に発表する。参考文献：1) E. Reissner, Jour. Aeronaut. Sci., Vol.15 (1948), pp.435~440. 2) C.W. Bert and S. Chang, Jour. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, Vol.98 (1972), pp.1499~1509. 3) S.A. Ambartsumyan, "Theory of Anisotropic Plates", (English Trans. by T. Cheron), Technomic Pub. Co. (1970), pp.1~213.