

早稲田大学 正員 平嶋 政治
早稲田大学 学生員 ○ 依田 照彦

1. 序論

薄肉構造部材の安定性に関する研究は、これまでに数多く発表されている。その中において個々の座屈形式、例えば曲げ座屈、ねじり座屈、曲げねじり座屈、横倒れ座屈、壁面座屈(局部座屈)等、に対する理論的研究及び実験的研究は著しく進歩した。⁽¹⁾ しかし、それらの座屈形式間の関連性あるいは統一的な解析法となると、まだ研究の余地があると思える。本報告に於いては、軸方向圧縮力を受ける薄肉開断面部材(工型断面)を例にとり、曲げ座屈、曲げねじり座屈、壁面座屈(局部座屈)の間の相互の関連性を調べ、併せて座屈問題に於ける断面変形の影響度を検討する。特に、薄肉構造部材に特徴的である壁面座屈(局部座屈)は板要素より成る組み立て部材の断面変形として解析できることを確かめてみた。従来の薄肉開断面部材に於いては、座屈状態の下にあっても断面は剛であると仮定されているので、壁面座屈(局部座屈)については別に計算する必要があった。ここでは断面変形を許すことによって壁面座屈(局部座屈)をも含めた座屈形式を論じ、統一的な座屈値の算出法を導くことを試みた。

2. 理論式

軸方向圧縮力を受ける部材の安定問題を解析する基礎となる中立のつり合い方程式は、弾性論の基本仮定が成り立っているものとするれば、

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_s}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_n}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right] = 0, \quad (1-a)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_s}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_s}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_n}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right] = 0, \quad (1-b)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_n}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_n}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_n}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right] = 0, \quad (1-c)$$

と表わせる。⁽²⁾

ここに、 $\sim$ 記号の付いた量は擾乱後の応力及び変位を表わし、座標系としては、板要素の面内方向(x, s)、面外方向(n)を用いた。

薄肉板要素より部材が構成されていると考え、ガレルキン法の使用を念頭に置くと、擾乱後の変位成分として、

$$\tilde{u}(x, s, n) = U_i(x) \Phi_i(s, n) = U_i(x) \varphi_i(s) - W_h'(x) w_h(s) n, \quad (2-a)$$

$$\tilde{v}(x, s, n) = V_k(x) \Psi_k(s, n) = V_k(x) \psi_k(s) - W_h(x) \dot{w}_h(s) n, \quad (2-b)$$

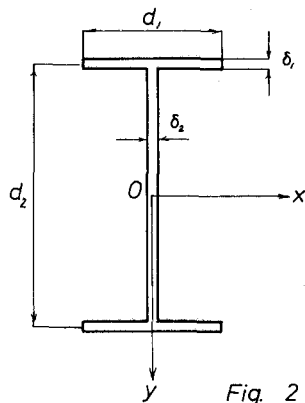
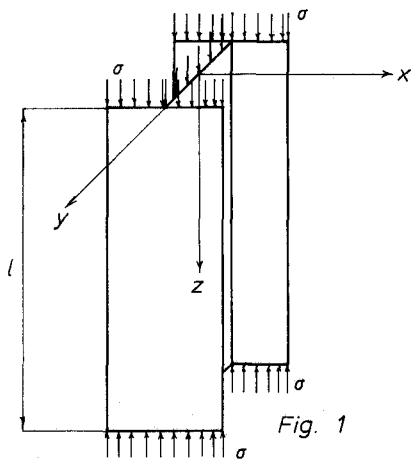
$$\tilde{w}(x, s, n) = W_h(x) w_h(s, n) = W_h(x) w_h(s), \quad (2-c)$$

と得る。従って、中立のつり合い方程式は次の様になる。

$$\int_F \left\{ \frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_s}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_n}{\partial n} + \sigma \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \right\} \Phi_j(s, n) dF = 0, \quad (3-a)$$

$$\int_F \left\{ \frac{\partial \tilde{\sigma}_s}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_s}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_n}{\partial n} + \sigma \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} \right\} \Psi_l(s, n) dF = 0, \quad (3-b)$$

$$\int_F \left\{ \frac{\partial \tilde{\sigma}_n}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_n}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_n}{\partial n} + \sigma \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \right\} w_h(s, n) dF = 0. \quad (3-c)$$



さらに変位成分を、従来の剛断面理論と矛盾することのないように配慮しつつ、右表の様に仮定する。(表-1参照)⁽³⁾

変位成分間の関係と φ_j, ψ_j, w_j の特徴を利用して、中立のつり合い方程式 $(3-a, b, c)$ から、 $\tilde{z}_{zn}$ と $\tilde{z}_{sn}$ を消去すると、座屈値を求める式

$$\sigma_j = \frac{-\frac{E}{1-\mu^2} \left\{ V_i^2 \int_F \varphi_i \varphi_j dF + W_h^2 \int_F w_h w_j n^2 dF + \mu W_h^2 \left[\int_F \dot{w}_h \dot{w}_j n^2 dF + \int_F w_h \dot{w}_j n^2 dF \right] - 2(1-\mu) W_h^2 \int_F \dot{w}_h \dot{w}_j n^2 dF + W_h^2 \int_F \dot{w}_h \dot{w}_j n^2 dF \right\}}{V_k^2 \int_F \psi_k \psi_j dF + W_h^2 \int_F w_h w_j dF} \quad (4)$$

が得られる。(高次の微小量は省略してある。)

ここに、 $' = \frac{\partial}{\partial x}$, $\dot{} = \frac{\partial}{\partial s}$, μ = ポアソン比である。

考察すべき薄肉開断面部材の断面形状と境界条件が定まれば、それに合せ変位成分を仮定することによって、座屈値を求めることができる。

そこで、今、例として二軸対称の工型断面部材を採用して、解析を進めることにする。安定問題の解析に於ける一般的な方法に従い、部材の両端がヒンジ結合である場合について考えると、 z 方向の一般変位 V_j, W_j は $z=0, l$ で $\tilde{v}(0, s) = \tilde{v}(l, s) = 0$, $\tilde{v}'(0, s) = \tilde{v}'(l, s) = 0$ を満たさねばならない、それ故、

$$V_j(z) = W_j(z) = a_j \sin \frac{\lambda_j z}{2} = a_j \sin \lambda_j z \quad (5)$$

と仮定して良いであろう。この条件の下に、各座屈形式に対応する座屈値 σ_j は

$$\sigma_j = \frac{\frac{E}{1-\mu^2} \left\{ \lambda_j^2 \left[\int_F \varphi_j^2 dF + \int_F w_j^2 n^2 dF \right] - 2\mu \int_F \dot{w}_j \dot{w}_j n^2 dF + 2(1-\mu) \int_F \dot{w}_j \dot{w}_j n^2 dF + \frac{1}{\lambda_j^2} \int_F \dot{w}_j^2 n^2 dF \right\}}{\int_F \psi_j^2 dF + \int_F w_j^2 dF} \quad (6)$$

と書き直せる。(Fig. 1, 2, 3 参照)

次に、 $w_j(s)$ の決定方法について述べることにする。この場合に於いても z 方向と同じように、 s 方向の境界条件を満たすような函数を選ばば良い。部材断面の対称性を考えると、 $w_j(s)$ が満たすべき境界条件は次の様になる。(Fig. 3 参照)⁽⁴⁾

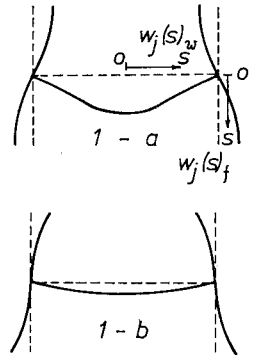
- i) 変位の連続性: a) $\tilde{w}_j(z, \frac{s}{2})_w = \tilde{v}_j(z, 0)_f$ i.e. $w_j(\frac{s}{2})_w = \psi_j(0)_f$
b) $\tilde{w}_j(z, 0)_f = \tilde{v}_j(z, \frac{s}{2})_w$ i.e. $w_j(0)_f = \psi_j(\frac{s}{2})_w$
- ii) 回転角の連続性: $\dot{\tilde{w}}_j(z, \frac{s}{2})_w = \dot{\tilde{w}}_j(z, 0)_f$ i.e. $\dot{w}_j(\frac{s}{2})_w = \dot{w}_j(0)_f$
- iii) モーメントのつり合い: a) $\tilde{M}_j(z, \frac{s}{2})_w + \tilde{M}_j(z, 0)_f + \tilde{M}_j(z, -0)_f = 0$
i.e. $D_w [\dot{\tilde{w}}_j(\frac{s}{2})_w - \mu \lambda_j^2 w_j(\frac{s}{2})_w] + D_f [\dot{\tilde{w}}_j(+0)_f - \mu \lambda_j^2 w_j(+0)_f] + D_f [\dot{\tilde{w}}_j(-0)_f - \mu \lambda_j^2 w_j(-0)_f] = 0$
b) $\tilde{M}_j(z, \frac{s}{2})_f = 0$ i.e. $D_f [\dot{\tilde{w}}_j(\frac{s}{2})_f - \mu \lambda_j^2 w_j(\frac{s}{2})_f] = 0$
- iv) セン断力のつり合い: a) $E I_f \tilde{V}_j''(z, 0)_f = \tilde{Q}_j(z, \frac{s}{2})_w - \sigma A_f \tilde{V}_j'(z, 0)_f$ i.e. $[E I_f \lambda_j^2 - \sigma A_f \lambda_j^2] \psi_j(0)_f = D_w [\dot{\tilde{w}}_j(\frac{s}{2})_w - (2-\mu) \lambda_j^2 w_j(\frac{s}{2})_w]$
b) $E I_w \tilde{V}_j''(z, 0)_w = 2[\tilde{Q}_j(z, 0)_f - \sigma A_w \tilde{V}_j'(z, 0)_w]$ i.e. $[E I_w \lambda_j^2 - \sigma A_w \lambda_j^2] \psi_j(0)_w = 2 D_f [\dot{\tilde{w}}_j(+0)_f - (2-\mu) \lambda_j^2 w_j(+0)_f - \dot{\tilde{w}}_j(-0)_f + (2-\mu) \lambda_j^2 w_j(-0)_f]$
c) $\tilde{Q}_j(z, \frac{s}{2})_f = 0$ i.e. $D_f [\dot{\tilde{w}}_j(\frac{s}{2})_f - (2-\mu) \lambda_j^2 w_j(\frac{s}{2})_f] = 0$.

これらの境界条件を満たす函数 $w_j(s)$ をべき級数函数で表現し、 σ の初期値を剛断面理論の座屈応力とし、 λ_j を変化させることにより、それぞれの座屈形式に対応する座屈応力を求めることができる。さらに、この得られた座屈応力を用いて、繰り返し演算を行えば、良い近似値が得られる。なお、数値計算の結果については、紙面の都合上、講演会当日に報告する予定である。

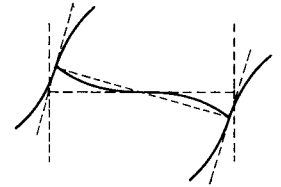
【参考文献】(1) 長柱研究委員会: 弾性安定要覧, コロナ社. (2) W.W. BOLOTIN: Kinetische Stabilität Elastischer Systeme, VEB.

(3) 大. 七. ウラソフ: 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂. (4) R. Schmied: DER STAHLBAU, 36, Heft 1, Januar, 1967, P.1.

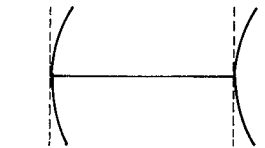
Fig. 3
Profile Deformation



1. Bending (y - axis)



2. Torsional Bending



3. Bending (x - axis)



4. Pure Profile Deformation