I-88 固有関数法による連続板の曲げ

信州大学 正員 ○石川 清志
谷本 勉之助
夏目 正太郎

1. まえがき. 板の連続板の曲げを複素固有関数法で行う. 四辺固定の矩形板の曲げの固有関数法は1964年にL. Herrmann によって発表され, 直交関数としてフーリエ級数によって解かれている. 固有関数法は複素量を用いることにより, 板の未定々数と境界条件より得れる式数が唯一に過不足なく対応し解が得られる. また境界条件は考えられるすべての条件を取りうる巾を有している. 境界条件処理はすべて固有値方程式に納められ, 固有値の値によって境界を満足に表現することができる. 一枚の板が途中において, 曲げ剛性, 荷重等の変化のある場合異る板が連続したものと考え連続板の扱いにすると便利である. また板の中間に支持がある場合は連続板として扱う(図-1).

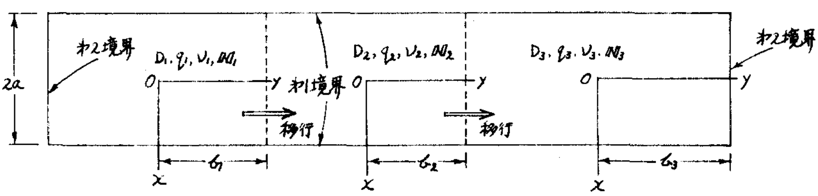

図-1. 連続板.

2. 基礎式. 板の曲げの基礎微分方程式は

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}. \tag{1}$$

たわみ関数 w を同次方程式 w_h と特殊解 w_p との和であらわす:

$$w = w_h + w_p \tag{2}$$

これより,

$$\nabla^4 w_h = 0, \qquad \nabla^4 w_p = \frac{q}{D}. \tag{3}$$

式(3a)より, 同次方程式におけるたわみ関数 w_h の一般解は

$$\begin{aligned} w_h &= \sum_n \lfloor \cos\lambda x \ \ \sin\lambda x \ \ \lambda x\cos\lambda x \ \ \lambda x\sin\lambda x \rfloor N_h \begin{bmatrix} ch\lambda y \\ sh\lambda y \end{bmatrix}, \qquad N_h = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix}. \\ &= \sum_n X(x) N_h Y(y). \end{aligned} \tag{4}$$

ここで, λ: パラメータ n に対応した未定複素定数, N_h: 複素固有マトリクス(未定積分定数).
式(3b)より, 特殊解におけるたわみ関数 w_p は板に一様分布荷重 q が満載のとき

$$\begin{aligned} w_p &= \lfloor 1 \ \ x \ \ x^2 \ \ x^3 \ \ x^4 \rfloor \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ c_0 & c_1 & c_2 & & \\ d_0 & d_1 & & & \\ e_0 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{bmatrix}, \qquad c_2 = -3a_4 - 3e_0. \\ &= X(x) N_p Y(y). \end{aligned} \tag{5}$$

式(2)より, たわみ w は式(4)と(5)により

$$w = \sum_n X(x) N_h Y(y) + X(x) N_p Y(y) \tag{6}$$

板の各物理成分を列ベクトル表示したものを状態ベクトルという．板の状態ベクトルはすべてたわみ関数の微分演算で得ることができる：

$$\mathbb{W}=\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ S_x \\ S_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ -D(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}) \\ -D(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}) \\ -(1-\nu)D\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \\ -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 \\ -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 \end{bmatrix}w=\sum_n[\mathbb{X}(x)]\mathbb{N}_h\{\mathbb{Y}(y)\}+[\mathbb{X}(x)]\mathbb{N}_p\{\mathbb{Y}(y)\}. \quad (7)$$

3．才1境界条件．図－1の才1境界（$x=\pm a$）において，境界条件式おのおの2本づつ計4本が得られる．この境界条件式により，同次方程式においては境界条件を十分に表現するところの固有値方程式が得られ，式(4)におけるパラメータnに対応した複素定数 λ が求まる．また才1境界条件により，固有マトリクスの自由度8個から2個に減少する．例として才1境界条件が固定－単純支持とすると，固有値方程式と固有マトリクスは

$$4\lambda-\sin 4\lambda=0, \qquad \mathbb{N}_h=\begin{bmatrix} -\lambda\cos\lambda\sin^2\lambda-\lambda^2\sin\lambda \\ -\lambda\cos^2\lambda\sin\lambda-\lambda^2\cos\lambda \\ \cos\lambda\sin^2\lambda-\lambda\sin\lambda \\ \cos^2\lambda\sin\lambda-\lambda\cos\lambda \end{bmatrix}\lfloor D_1 \quad D_2\rfloor=\mathbb{P}(\lambda)\Omega. \quad (8)$$

特殊解における境界条件は同次方程式のときと同様に扱われるが，特に異る点は才1境界条件を取り入れることにより，式(5)における特殊解の未定数$\mathbb{N}_p$がすべてきまるようにしなければならなく，特殊解は既知項にするためである．才1境界条件処理が終ると，$\mathbb{Y}(y)$とΩとの間で行と列を入れ変え，才2境界条件からは4本の式が考えられるから，未定定数Ωを実数化することにより，系の自由度と境界条件式が唯一に対応し解が定まることになる．それゆえ状態ベクトル $\mathbb{W}$ はx関数$\mathbb{X}(x), X(x)$を直交関数系列のフーリエ級数にて展開すると

$$\mathbb{W}=\sum_m\sum_n[\mathbb{X}(y)_{mn}]\mathbb{K}+\sum_m\lfloor\mathbb{P}(y)_m\rfloor. \quad (9)$$

4．移行演算．板の曲げ剛性等のちがう板と板の連続条件，および中間支持のある場合の連続条件は図－1より，それぞれ

$$\begin{bmatrix} w(-b) \\ \theta_y(-b) \\ M_y(-b) \\ S_y(-b) \end{bmatrix}_i=\begin{bmatrix} w(b) \\ \theta_y(b) \\ M_y(b) \\ S_y(b) \end{bmatrix}_{i-1}, \qquad \begin{bmatrix} w(-b) \\ w(b) \\ \theta_y(-b) \\ M_y(-b) \end{bmatrix}_i=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_y(b) \\ M_y(b) \end{bmatrix}_{i-1}. \quad (i=2,3,4,\cdots) \quad (10)$$

式(10)の連続条件は式(9)において連続条件の各物理成分を選択することにより，連続条件の移行演算によって漸化式になる：

$$[\mathbb{X}_{mn}]\{\mathbb{K}\}_i=[\mathbb{X}_{mn}]\{\mathbb{K}\}_{i-1}. \quad (11)$$

5．まとめ．荷重が板に一様満載でなく，部分分布した荷重の扱いは一般的に板の全領域にフーリエ級数で展開するが，フーリエ級数の次数を高次までとっても部分分布荷重の階段型関数の表現はむずかしい．そこで部分分布荷重の扱いを荷重の作用する板と作用しない板の連続板と考えて解析すると非常にフーリエ級数によるいたずらに救われるように思える．