I-87　固有関数法による各種支持条件の矩形板の曲げ

信州大学　学生員　○滝本　幸夫
正員　谷本　勉之助
正員　夏目　正太郎

1. まえがき

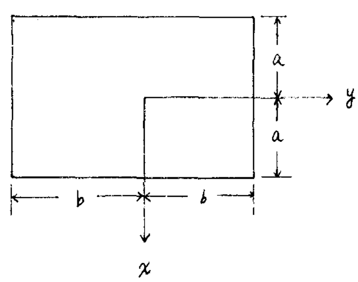
本論文は、各種支持条件の矩形板の曲げを、固有関数法を用いて解析を行なう。固有関数法においては、境界条件を才一境界条件と才二境界条件とに分けることから、才一境界条件の可能な場合として、六個考えられる。この六個の場合について、固有関数法の適用を試みる。解析において、無限連立方程式が生じるが、有限項で区切ってこれを取り扱うので、項数による収束性の度合や信頼性などを、数値計算より吟味する。また、一つの矩形板に関し、二つの解析方法があるので、双方の比較検討を行なう。固有関数の級数展開系列は、ルジャンドル多項式によるノイマン級数展開を用いる。

2. 解析手法

板の曲げの基礎微分方程式 $\nabla^4 w = q/D$ を満たすたわみ w を、同次解 w_h と特殊解 w_p との和で表わす。一般に、$\nabla^4 w_h = 0$ の解は次式で表わされる。（$\rho = x/a$, $\eta = y/a$）

$$w_h = \lfloor \cos\lambda\rho,\ \lambda\rho\sin\lambda\rho,\ \sin\lambda\rho,\ \lambda\rho\cos\lambda\rho \rfloor\ \mathbb{N}_h \ \{ ch\,\lambda\eta,\ sh\,\lambda\eta \} \qquad (1)$$

ここで、$\mathbb{N}_p$ は4×2の未定常数マトリックスである。



$\rho = \pm 1$ での才一境界条件を用いると、可能な六個の場合について、固有値方程式が導びかれる。ここで、単純支持ー単純支持から求められる固有値は、実数根だけで、Levy の解と同一のものを表わすことになり、ここではこれは取り扱わない。他の場合については、実数根は多くても数個であり、無限個の虚根の固有値が生じる。固有関数法では、本来、この固有値が無限個の虚根だけが表われる場合に対してのみ、解析可能であったが、このように、数個の実数根が表われる場合に対しても、適当に実数根の処理を行なえば、充分正しい解が得られる。結局、式(1)は、才一境界条件で処理した形で表わすと、

$$w_h = \sum_{n=1}^{\infty} \lfloor \cos\lambda\rho,\ \lambda\rho\sin\lambda\rho,\ \sin\lambda\rho,\ \lambda\rho\cos\lambda\rho \rfloor\ \mathbb{P}(\lambda)\ \lfloor ch\lambda\eta,\ sh\lambda\eta \rfloor\ \mathbb{A}_n \qquad (2)$$

ここで $\mathbb{P}(\lambda)$ は各種の境界条件によって異なる、縮小マトリックスである。また、一般に固有値が複素量であることから、$\mathbb{A}_n$ は複素未定常数として取り扱う。次に、式(2)で表われた固有関数を級数表現すると、たわみ w_h は、次のようになる。

$$w_h = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \lfloor ch\lambda\eta,\ sh\lambda\eta \rfloor\ \mathbb{A}_n \qquad (3)$$

ここで、$P_m(\rho)$ はルジャンドル多項式の m 項を表わしており、ω_{mn} はこれに対応する係数である。才二境界条

件に必要な状態量も、同様に、級数表現する。

$$\mathbb{W}_h = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \lfloor ch\lambda\eta,\ sh\lambda\eta \rfloor \mathbb{A}_n \tag{4}$$

ここで $\mathbb{W}_h = \{ w,\ \theta_y,\ M_y,\ V_y \}_h$ であり、ω_{mn} はこれに対応するルジャンドル多項式の係数である

次に、特殊解 $\nabla^4 w_p = \mathcal{E}/D$ も同様に級数表現をする。そのために、w_p を次のように x と y の4次の多項式で表わされるものと仮定する。

$$w_p = \lfloor 1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3\ \rho^4 \rfloor \mathbb{N}_p \{ 1\ \eta\ \eta^2\ \eta^3\ \eta^4 \} \tag{5}$$

ここの $\mathbb{N}_p$ は未定常数であるが、オ一境界条件と微分方程式より、容易に決定されうる。求められた w_p も級数表現すると、

$$w_p = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\rho)\, k_m \tag{6}$$

他の状態量も、同様に、級数表現すると、

$$\mathbb{W}_p = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\rho)\, \mathbb{K}_m \qquad \left(\mathbb{W}_p = \{ w,\ \theta_y,\ M_y,\ V_y \}_p \right) \tag{7}$$

式(4)と(7)より、

$$\mathbb{W} = \mathbb{W}_h + \mathbb{W}_p = \sum_{m=0} P_m(\rho) \left\lfloor \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \lfloor ch\lambda\eta,\ sh\lambda\eta \rfloor \mathbb{A}_n + \mathbb{K}_m \right\rfloor \tag{8}$$

$y=\pm b$ のオ二境界条件より、式(8)より次のような無限連立方程式が導びかれる。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{Z}_{01} & \mathbb{Z}_{02} & \cdots & \mathbb{Z}_{0\infty} \\ \mathbb{Z}_{11} & \mathbb{Z}_{12} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbb{Z}_{\infty 1} & \cdots & \cdots & \mathbb{Z}_{\infty\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{A}_1 \\ \mathbb{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{A}_\infty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{F}_0 \\ \mathbb{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{F}_\infty \end{bmatrix} = 0 \tag{9}$$

$\mathbb{Z}_{mn}$ はルジャンドル多項式の m 項、固有値の n 番目の要素を示す。固有関数法において、最終的な形はすべて式(9)のようになるが、実際の計算においては m と n を適当に区切って未定常数 $\mathbb{A}_n$ を決定する。

3、あとがき

数値計算で困難な点は、固有値の算出と、ノイマン係数の決定であるが、矩形板の固有値に関しては、すでに精密な解を得ており、係数決定に関しては、電算にあった漸化式が導びかれている。なお、数値計算例は、講演の際に発表します。

参考文献

1) 石川清志,谷本勉之助,夏目正太郎「固有関数法による矩形板の曲げ解析」土木学会オ27回年次学術講演会概要集.
2) 中原実,小沢公共,谷本勉之助,夏目正太郎「固有関数法による板の解析」土木学会オ25回年次学術講演会概要集.