I-86　固有関数法による矩形複合板の引張り

信州大学工学部　正員　○夏目正太郎
〃　〃　谷本勉之助
〃　〃　石川清志

1. はじめに　ここに掲げた境界値問題は、図1. に示すごとく、2枚の相異なる矩形板を1辺で接続し、上下のy軸に平行な辺には外力がなく、左右の辺には等分布の張力Tが作用しているもので、近年われわれが用いている固有関数法を応用してみようとするのである。同じ問題を、Iyengar は実関数のみで処理して、ZAMMに1963年発表している。がそれは大変複雑な解析結果である。また有限要素法を用いれば、最初に取り上げられる問題でもある。われわれのグループでは、単体の矩形板や平行四辺形板の曲げ解析について、固有関数法でそれぞれ成果をおさめており、毎年この講演会で発表して来ている。弾性体内に関する諸量が、波型関数や双曲線関数でもって表現されるのは良いとしても、境界条件や接続条件となると必ずしも内部と同様であるとは限らず、むしろ、見た所は簡単な図形で示される場合が多い。従ってその形状に合致させるように、直交関数の級数展開を行い、処理しているのであるが、収束の具合が必ずしも満足するとは限らず、苦心する所である。ここでは逆に弾性体内部の問題も境界条件の展開に合わせて、Legendre 多項式で展開しようとするものである。

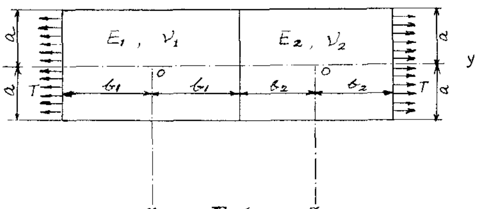

図 1.

2. Airyの応力関数と固有値　2種類の板を接続したものであるので、それぞれに適した応力関数χ_iが存在し、添字iを1，2とすることにより、それぞれの板の応力関数とす。図1. に見られるようにy軸に関しては対称な系である所から、

$$\chi_i=\sum\frac{a^2}{\lambda^2}\lfloor\cos\lambda\rho,\ \lambda\rho\sin\lambda\rho\rfloor N_i\begin{bmatrix}\mathrm{ch}\frac{\lambda y}{a}\\ \mathrm{sh}\frac{\lambda y}{a}\end{bmatrix}+\frac{Tx^2}{2} \qquad (1)$$

となり、この中でλ_iは固有値，$\rho=x/a$，N_iは未定常数を示すものである。

固有値λ_iを求めるには、第1境界条件である所の$x=\pm a$における直応力，せん断応力が零の式から固有値方程式を造る。その結果は

$$2\lambda_n+\sin 2\lambda_n=0 \qquad (2)$$

となり、この根については、すでに過去において、われわれしグループにて精緻な結果を得ており、それを使用することになる。これらの固有値λ_nを取り入れることにより、式(1)は書きかえられ、

$$\chi_i=\sum_n\frac{a^2}{\lambda^2}\lfloor\cos\lambda\rho,\ \lambda\rho\sin\lambda\rho\rfloor\begin{bmatrix}-\lambda\sin\lambda\\ \cos\lambda\end{bmatrix}\lfloor\mathrm{ch}\frac{\lambda y}{a},\ \mathrm{sh}\frac{\lambda y}{a}\rfloor C_n+\frac{Tx^2}{2} \qquad (3)$$

となり、未定常数であるC_nをxの関数群とyの関数群の最右端へ取り出すことにした。C_nは2行1列のマトリクスであり、複素常数である。この様にC_nがくくり出された形になっていることにより、従来骨組構造で見られた様な遷移子と同形式となり、継ぎの部分で移項演算をするのに便利な態勢を示すのであり、またひいては、多重移項に精度よい結果を骨組構造解析で見た如く、ここでも剛化変形法に書きかえる手掛りにもなっている

3. 継ぎの条件式　2枚の矩形板が1辺で接合されているとき、連続性として、x方向、y方向の変位成分が等しく、なお、y軸方向の直応力と、接続面のせん断応力が等しくなければならない。矩形板を連続しているので、接合部は直線であり、この直線上のどの点をとっても上記連続条件を満足させなければならないのである。ここにLegendre多項式展開によって、より良き近似をさせようとするものである。いま、継ぎ部分の状態ベクトルを

$$\mathbb{W}(x,y)=\{u,\ v,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}\} \tag{4}$$

とすれば

$$\mathbb{W}(x,y)=\sum_n \mathbb{X}_n(x)\cdot\mathbb{Y}_n(y)\cdot\mathbb{C}_n+\mathbb{W}_p(x,y) \tag{5}$$

のようになり、ここで

$$\mathbb{X}_n(x)=\begin{bmatrix}\frac{(1+\nu)a}{E\lambda}\\ \frac{(1+\nu)a}{E\lambda}\\ 1\\ 1\end{bmatrix}^D\begin{bmatrix}\sin\lambda\rho, & \frac{1-\nu}{1+\nu}\sin\lambda\rho-\lambda\rho\cos\lambda\rho\\ -\cos\lambda\rho, & \frac{2}{1+\nu}\cos\lambda\rho-\lambda\rho\sin\lambda\rho\\ -\cos\lambda\rho, & 2\cos\lambda\rho-\lambda\rho\sin\lambda\rho\\ \sin\lambda\rho, & -\sin\lambda\rho-\lambda\rho\cos\lambda\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\lambda\sin\lambda\\ \cos\lambda\end{bmatrix}_n \tag{6a}$$

$$\mathbb{Y}_n(y)=\begin{bmatrix}ch\frac{\lambda y}{a}, & sh\frac{\lambda y}{a}\\ sh\frac{\lambda y}{a}, & ch\frac{\lambda y}{a}\\ ch\frac{\lambda y}{a}, & sh\frac{\lambda y}{a}\\ sh\frac{\lambda y}{a}, & ch\frac{\lambda y}{a}\end{bmatrix} \tag{6b}$$

$$\mathbb{W}_p(x,y)=T\begin{bmatrix}-\frac{\nu x}{E}\\ \frac{y}{E}\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \tag{6c}$$

であり、(6a)式をLegendre多項式で展開すると、第1行と第4行は奇関数で他は偶関数である所から

$$\mathbb{X}_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[P_{2m}(\rho)\begin{bmatrix}0\\ b\\ c\\ 0\end{bmatrix}_{2m}+P_{2m+1}(\rho)\begin{bmatrix}a\\ 0\\ 0\\ d\end{bmatrix}_{2m+1}\right]_n \tag{7}$$

となり、

$$\mathbb{X}_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}P_m(\rho)\,\mathbb{a}_{mn} \tag{8}$$

と書ける。かくして、$y=b_1$、と$y=-b_2$とで2枚の板が接合されるので、

$$\Big[[\mathbb{A}_{mn}]\{\mathbb{C}_n\}+\{\mathbb{f}_m\}\Big]_{1,\,b_1}=\Big[[\mathbb{A}_{mn}]\{\mathbb{C}_n\}+\{\mathbb{f}_m\}\Big]_{2,\,-b_2} \tag{9}$$

を得、外力が作用している$y=-b_1$、と$y=b_2$端の、第2境界条件とで、未定常数$\mathbb{C}_{1,n}$と$\mathbb{C}_{2,n}$とが決定される

4. あとがき　一般変位と、応力に関しては

$$\mathbb{U}_i=\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}_i=\sum_n\frac{(1+\nu)a}{E\lambda}\begin{bmatrix}\sin\lambda\rho, & \frac{1-\nu}{1+\nu}\sin\lambda\rho-\lambda\rho\cos\lambda\rho\\ -\cos\lambda\rho, & \frac{2}{1+\nu}\cos\lambda\rho-\lambda\rho\sin\lambda\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\lambda\sin\lambda\\ \cos\lambda\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}ch\frac{\lambda y}{a}, & sh\frac{\lambda y}{a}\\ sh\frac{\lambda y}{a}, & ch\frac{\lambda y}{a}\end{bmatrix}\mathbb{C}_{n,i}+\frac{T}{E}\begin{bmatrix}-\nu x\\ \frac{y}{a}\end{bmatrix}, \tag{10a}$$

$$\mathbb{V}_i=\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}_i=\sum_n\begin{bmatrix}\cos\lambda\rho, & \lambda\rho\sin\lambda\rho\\ -\cos\lambda\rho, & 2\cos\lambda\rho-\lambda\rho\sin\lambda\rho\\ \sin\lambda\rho, & -\sin\lambda\rho-\lambda\rho\cos\lambda\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\lambda\sin\lambda\\ \cos\lambda\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}ch\frac{\lambda y}{a}, & sh\frac{\lambda y}{a}\\ ch\frac{\lambda y}{a}, & sh\frac{\lambda y}{a}\\ sh\frac{\lambda y}{a}, & ch\frac{\lambda y}{a}\end{bmatrix}\mathbb{C}_{n,i}+T\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \tag{10b}$$

で表わされるので弾性体内部の変位、応力は計算される。この解法は骨組系で取扱った演算子法と類似しているので(9)式を解く際、多元連立方程式(複素根)になる所が十分注意しなければ、結果において、ややもすると精度を乱すおそれがある。特に多重移項演算とするような場合には、誤差の集積が必ずおこると思う。それを避けるためにも漸化変形法になるよう、式の組みかえをすべきであろう。