

1. まえがき

薄肉曲面板によって構成されるパネルの終局強度は, 土木構造の分野においても, 関心の持たれる問題の一つであるが, 目下のところ, 平板構造にくらべると, 研究例も数少ない。その主な理由として, 一般に, シェルの解析が, 平板の場合より複雑になり, また, 精度上の問題点も多いことが挙げられよう。従来, シェルの解析的方法の面では, 平板問題とは, 幾分異なった発展の過程が見られる。すなわち, 弾性シェルの微小変形に関する, 厳密な基礎式として著名な Flugge の式を中心に, 未知量の消去によって 8 階の基礎式に帰着させる方法, あるいは, それらの近似化などについて, 多くの人々が論じており, たとえば, Donnell の近似解が, 条件によっては, Flugge の解と, かなりの差異を持つことなどが指摘されている。しかし, それらの議論も, 場合によっては, 省略項の意味が不明確であったり, また一般に, 基礎式の複雑さのゆえに, 解析解の得られる範囲に制約があり, 議論の範囲が限られ, 発展性に乏しい感がある。一方, 数值計算の方法についても, おしなべて, 平板の場合より精度上の問題点が多く, 有限変形や弾塑性, リブの補剛効果など, 複雑, かつ局所性の強い力学的挙動の連成する, この種の問題の解析にあたっては, 方法論的にも研究課題があるように思われる。

さて, 筆者はすでに, 平板構造における同様の問題について, 解析的方法と, 数值計算の方法の両者の持つ特性を相補形で利用する, 1 種の hybrid な性格を持つ解法を提示し, 長方形板に関する若干の応用例によって, その有用性を確かめてきた。この解法の特長は, 連続解(解析解)を基底に置いて精度を向上させ, 同時に, 必要最小限の選定法, 差分法を併用して, 解の適用範囲を拡張し, 上述のような複雑な問題を高精度で, かつ実用的に解析するところにある。そこで, このような解析上の経験をもとに, 平板の基礎式(4 階の釣合式, 適合条件式)の右辺に, シェルの等動を表わす若干の項を付加する方法を採り, 同時に, それらの項に, 従来, とくく議論の対象となつた, 式の精度度による区別を与え, 平板解析の場合と同様の手法を重ねることによって, 薄肉シェルの同類の問題を, 平板問題と一元化した形で, 便利に解くことを考えた。その意図するところは, 次のとおりである。

- 1) 基底に置く解析解(級数解)として平板の解を用いるので, その扱いが容易であり, 選定法の導入にも適している。また, 計算上有効な, 級数総和法が適用できるので, 断面力の収束値を得るのに便利である。
- 2) 釣合式と適合条件式が同形であり, また, 各式の右辺の各項で与えられる物理量を, 板内の有限領域で平均化することによって, 同一の解と手法を key として解法を整備することができる。さらに, それぞれの物理量の意味が明確であり, 解析対象によっては近似解を用いることができる。
- 3) シェルと平板の解析が, 広範囲にわたって一元化されるので, 同一のプログラムをシェルと板の双方に適用できる。すなわち, 平板は, 解法上, シェルの特別の場合になる。

次に, 解法を照査するための基本的な問題として, 今回, 以下のことを考えた。

- 1) 部分荷重を受ける弾性シェルの微小変形の問題について, 本解法の精度を調べる。前述のように, 本解法は, 基礎式の右辺に, 応力-ひずみ関係における, Donnell の近似仮定に相当する項(以下, この項のみを考慮して得られる解を近似解と呼ぶ)と, さらに Flugge の仮定に対応させるための補正項(以下, 同様に, 精密解と呼ぶ)を含むように構成してあるので, 特に, 部分荷重, 辺長比などの条件が, 両者の精度上の差異をもたらすことを考慮し, 解析対象によっては近似解を代用させるための, より広い知見を獲得する。

- 2) 大たわみ, および弾塑性問題における, 本解法の精度を調べる。さらに, 解法上, 基礎式の右辺における, これらの非線形特性を持つ物理量が, 線形化によって, 本質的には, 局所的な部分荷重と類似の性格を持つこ

とを考慮し、1)の問題と関連した照査をおこなう。

2. 基礎式：誘導の要旨は次のとおりである。

1) 断面力とひずみ、変形の関係は、弾性線形問題における、Flügge, 溝口らの表示と同様に、有限変形、ならびに弾塑性変形をも考慮して、精密に与え、また、それらは、Donnell の近似仮定によるものを、補正する形に表わされる。

2) 6個の釣合条件式のすべてを充足させる。

3) 適合条件式は中央面で充足させ、応力関数を導入する。

4) 塑性ひずみは、flow rule によって与える。

なお、本文では、円筒シェルの場合について述べるが、本解法は、2方向に曲面を有するものにも拡張することができる。

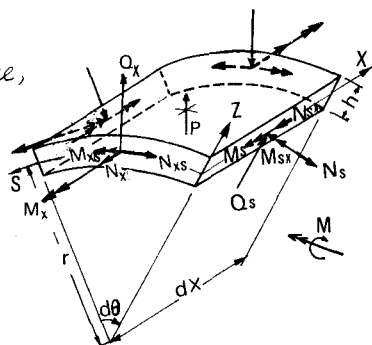


図-1

図-1によって断面力を表示し、Z方向のたわみをWとして、上記の仮定による次の2つの基礎式が得られる。

$$\Delta\Delta W = \frac{P}{K} + \sum_{k=1}^6 U_k \quad \text{-----(1)} \quad \Delta\Delta\phi = \sum_{k=1}^5 V_k \quad \text{-----(2)}$$

ここに、 $\Delta\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right)$ ρ : 荷重強度、 ϕ : 応力関数、 K : 板剛度 $= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{1}{rK} \rho_x, \quad U_2 = \frac{1}{rC} D_x \rho_x - \frac{1}{r^2} (K_s + K'_s + 2K_x), \quad U_3 = \frac{1}{K} (\rho_s K_x + \rho_x K'_s - 2\rho_{xs} K_{xs}), \\ U_4 &= \frac{1}{r} \left[\{K_s + (2-\nu)K_x\} K'_s - (1-\nu)K_{xs}^2 \right], \quad U_5 = -\frac{4}{r} \sum_L \left[D_x \{ \mu \chi_x + \nu \chi_s \} + D_s \{ \mu (\chi_s + \nu \chi_x) \} \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu) D_{xs} (\mu \chi_{xs}) \right]_L, \quad U_6 = \frac{4}{rK} \sum_L \left[\mu \{ \chi_s + (2-\nu) \chi_x \} K'_s - \frac{1}{2} (1-\nu) (\mu \chi_{xs}) K_{xs} \right]_L \\ V_1 &= \frac{Eh}{r} K_x, \quad V_2 = -\frac{2K(1-\nu)}{r} (D_x + D_s) K_x, \quad V_3 = Eh (K_{xs}^2 - K_x K'_s), \\ V_4 &= -Eh \sum_L \left[D_s (\mu w_x) + D_s (\mu w_s) - D_{xs} (\mu w') \right]_L, \quad V_5 = -\frac{8K(1-\nu)}{r} \sum_L \{ (D_x + D_s) (\mu \chi_x) \}_L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また、} \quad \rho_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x^2}, \quad \rho_s = \frac{\partial \phi}{\partial s^2}, \quad \rho_{xs} = \frac{\partial \phi}{\partial x \partial s}, \quad K_x = \frac{\partial w}{\partial x^2}, \quad K'_s = \frac{\partial w}{\partial s^2}, \quad K_s = \frac{\partial w}{\partial s^2} + \frac{w}{r^2} \\ K_{xs} &= \frac{\partial w}{\partial x \partial s}, \quad \chi_x = \frac{\partial f}{\partial m_x}, \quad \chi_s = \frac{\partial f}{\partial m_s}, \quad \chi_{xs} = \frac{\partial f}{\partial m_{xs}}, \quad w_x = \frac{\partial f}{\partial n_x}, \quad w_s = \frac{\partial f}{\partial n_s}, \quad w' = \frac{\partial f}{\partial n'} \end{aligned}$$

$$n' = \frac{1}{2} (n_{xs} + n_{sx}), \quad C = \frac{Er}{1-\nu^2}, \quad f: \text{塑性ポテンシャル}, \quad \mu: \text{塑性ひずみの係数},$$

$$L: \text{荷重段階}, \quad D \text{ は部分的に使用される差分記号で, } D_x = \frac{\Delta^2}{\Delta x^2}, \quad D_s = \frac{\Delta^2}{\Delta s^2}, \quad D_{xs} = \frac{\Delta^2}{\Delta x \Delta s}$$

断面力は次のように書かれる

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \rho_s, \quad N_s = \rho_x + \frac{K}{r} \{ K_s + (2-\nu) K_x \} + \frac{4K}{rK} \sum_L \{ \mu \chi_s + (2-\nu) \chi_x \}_L, \quad N_{sx} = -\rho_{xs} \\ N_{xs} &= -\rho_{xs} - \frac{K}{r} (1-\nu) K_{xs} - \frac{2K}{rK} (1-\nu) \sum_L (\mu \chi_{xs})_L, \quad M_x = K (K_x + \nu K'_s - \frac{N_x}{rC}) + \frac{4K}{r} \sum_L (\mu \chi_x + \nu \chi_s)_L \\ M_s &= K (K_s + \nu K_x) + \frac{4K}{r} \sum_L (\mu \chi_s + \nu \chi_x)_L, \quad M_{sx} = M_{xs} = K (1-\nu) K_{xs} + \frac{2K}{r} (1-\nu) \sum_L (\mu \chi_{xs})_L \end{aligned} \right\} \quad \text{---(3)}$$

基礎式(1),(2)の右辺 U_k, V_k の各項の性格にもとづき、それらを取捨選択して、下表のように、種々の解析対象に適用させることができる

表. 解析対象による、U, V の分類 (*微小変形, **有限変形, ***弾塑性)

解析対象	平板*	シェル* (近似解)	シェル* (精密解)	平板**	シェル** (近似解)	シェル** (精密解)	平板***	シェル*** (近似解)	シェル*** (精密解)
式(1)	0	U_1	$U_{1\sim 2}$	U_3	U_1, U_3	$U_{1\sim 4}$	U_3, U_5	U_1, U_3, U_5	$U_{1\sim 6}$
式(2)	0	V_1	$V_{1\sim 2}$	V_3	V_1, V_3	$V_{1\sim 3}$	V_3, V_4	V_1, V_3, V_4	$V_{1\sim 5}$

3. 解法

式(1), (2)を解く場合, 物理量 U_k, V_k は, 図-2にみるように分割された有限領域 (i, j など) においては, 一定値 (等分布) として扱い, 各領域の中心点 (選点) の値を用いる。そこでこの場合, 式(1), (2)の W, ϕ, P, U, V を, 2重級数

$$\sum_m \sum_n R_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} s$$

の形に展開すると, 板内各点 (選点) の変位, 断面力に関する, 各領域における, U_k, V_k の単位の量の影響係数は, 同一の基本解 (Navier の解) によって容易に与えられる。

1) シェルの解 (近似解*) ; 表により, U_1, V_1 を考慮すると, 基礎式は,

$$\Delta \Delta W = \frac{P}{K} - \frac{1}{K} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \Delta \Delta \phi = \frac{ER}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad \text{----- (4)}$$

上述の影響係数 (下記 C_{ij}, C''_{ij} など, 収束値) を用いて, 選点 i における解を得る。

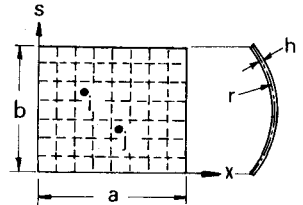


図-2

$$W_i = \frac{1}{K} C_{ij} P_j - \frac{1}{K} \sum_j C_{ij} (P_x)_j, \quad \phi_j = \frac{ER}{r} \sum_i C_{ji} (W_x)_i \quad \text{----- (5)}$$

(5)の各式を微分して ($\phi: \frac{\partial^2}{\partial x^2}$), $(W_x)_i, (P_x)_j$ の式を作り, $(P_x)_j$ を消去して整理すると,

$$(W_x)_i + \frac{ER}{Kr^2} \sum_j C''_{ij} \sum_l C''_{jl} (W_x)_l = \frac{1}{K} C''_{it} P_x \quad \text{----- (6)}$$

(6)は, 各有限領域における選点 i に, 1自由度の未知量 $(W_x)_i$ を持つ連立方程式であり, $(W_x)_i$ が求まれば, (5)により ϕ さらには W が求まる。このようにして, 各有限領域の部分荷重 P による, すべての諸量が求まる。一方, 式(1), (2)のその他の項, U_{2-6}, V_{2-5} が, いずれも部分荷重に関連した性格を持つことに留意すれば, (5)は, その基本解となる。

2) シェルの解 (精密解*) ; 必要があれば, さらに U_2, V_2 の項を考慮し, 1)で求めた近似解によって, その仮定値を与え, 繰返し計算によって, W, ϕ を修正して精密解が得られる。若干の例題による経験によれば, この計算はすみやかに収束する。

3) シェルの解 (有限変形**) ; 有限変形の場合は, 荷重を漸増させ, U_3, V_3 (精密解の場合は U_3+U_4, V_3) を考慮して, 同様に, 繰返し計算により収束値を求める。

4) シェルの解 (弾塑性***) ; 荷重を漸増させ, さらに, U_5, V_4 (精密解の場合は, U_5+U_6, V_4+V_5) を考慮し, 塑性化した各点で, 降伏条件 ($f=0$) を満足するように, μ を定めながら, 繰返し計算によって収束値を求める。この計算の方法は, すでに平板に肉して発表した前論文の手法と同様である。

5) 平板の解 ; 前表にみるように, U, V のうち, シェルの特性に関連する項の計算を除去すれば, 平板の解が得られる。また, シェルの場合, 実用上, 近似解で十分な問題もあり, この場合は, 1)の操作を除いては, 平板の場合と全く同様である。

6) 境界条件に対する適用性の拡張 ; すでに平板の場合で示したように, 境界選点法が併用できる。この場合, 必要に応じて, 補足解として, Lévy 解が用いられる。

4. あとがき

本文は, 平板解法と同様な手法にもとづく, 1種の hybrid な解法によって, シェルと平板の解析を広範囲にわたって一元化し, 高精度, かつ実用的に扱う方法を述べたものである。基本的な例題についての解析データの一部を, すでに, 関西支部年次学術講演会 (S. 49, 5) で報告したが, 弾性シェルの解析における, 本解法の精密解の精度は, Flugge の式を厳密に解く場合とほとんど同等である。其の後に得られたデータを加えたものを, 講演時に説明する。