

土木工学部 正員 能町純雄
 北見工業大学 同 大島俊之
 同 同 高橋義裕

1. まえおき

図1のような上部床版を下から逆ラニカ-形式の両辺に垂直杭で支持している構造は、一般に設計上は平面的に逆ラニカ-形構造として解析されるが、床版に平板の理論を導入することによってこの構造を立体的に解析することもできる。本論では床版を帯板要素法 (Finite Strip Method) で解き、帯板の四隅をラニカ-の鉛直杭で支持しているときとし、代償剪断力 (Compensate Shear) をおぼえコーナーの剪断力と鉛直部杭力とを比較してあるときと考える。

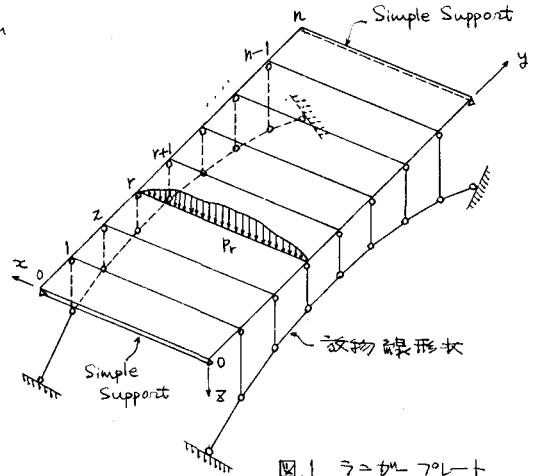


図1 ラニカ-ポレート

荷重として横荷重などいろいろ考えられるが、本論では床版に垂直に作用する図1のような荷重を考えている。

2. 帯板要素の解法

平板の微分方程式 $N \Delta^2 w = q$ (1) N : 板の曲げ剛性。
 したがって、 $b \ll l$ とし、 x 方向にフーリエ無限積分変換、 y 方向に有限フーリエ変換し、 y 方向に逆変換すると次式を得る。このとき荷重 q は分割の途中には存在しないものと考ええる。

$$W_m = W_{m0} \cdot Q_m(\eta) + W_{m1} \cdot Q_m(\eta) - b^2 P_m(\eta) \left\{ \frac{d^2 W_m}{dy^2} - w^2 W_m \right\}_b - b^2 P_m(\eta) \left\{ \frac{d^2 W_m}{dy^2} - w^2 W_m \right\}_0 \quad (2) \quad (\eta = \frac{y}{b})$$

$$Q_m(\eta) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n / b}{\sqrt{m^2 + (\pi n / b)^2}} \sin \frac{\pi n}{b} \eta = \frac{\sinh m b (1-\eta)}{\sinh m b} \quad (3)$$

$$P_m(\eta) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n / b}{\sqrt{m^2 + (\pi n / b)^2}} \sin \frac{\pi n}{b} \eta = \frac{\eta \sinh m b (2-\eta) - (2-\eta) \sinh m b \eta}{2 m^2 (\cosh 2 m b - 1)} \quad (4)$$

$P_m(\eta)$, $Q_m(\eta)$ は Bernoulli の多項式に展開し、 $\frac{d^2 w}{dy^2} = -\frac{M^*}{N}$ とおくと、

$$w = w_0 f^0(\eta) + w_b f^0(1-\eta) + \frac{M_0^*}{N} b^2 f^0(\eta) + \frac{M_b^*}{N} b^2 f^0(1-\eta) \quad (5)$$

$$N \Delta^2 w = (-M_0^* + N \ddot{w}_0) f^0(\eta) + (-M_b^* + N \ddot{w}_b) f^0(1-\eta) + b^2 (N \ddot{w}_b - \ddot{M}_b^*) f^0(1-\eta) + b^2 (N \ddot{w}_0 - \ddot{M}_0^*) f^0(\eta) \quad (6)$$

$$\text{したがって } f^0(\eta) = 1-\eta, \quad f^0(1-\eta) = \frac{1}{6} \eta (1-\eta) (2-\eta), \quad \text{また } \theta = \frac{2\pi \eta}{b}, \quad S = -N \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} w \quad \text{と}$$

$$\theta_{r,r+1} = \frac{1}{b} (w_{r+1} - w_r) + \frac{b}{6N} (2M_r^* + M_{r+1}^*), \quad \theta_{r,r-1} = \frac{1}{b} (w_r - w_{r-1}) - \frac{b}{6N} (2M_r^* + M_{r-1}^*) \quad (7), (8)$$

$$S_{r,r+1} = \frac{1}{b} (M_{r+1}^* - M_r^*) - \frac{N}{b} (w_{r+1} - w_r) + \frac{b}{3} (\ddot{M}_r^* - N \ddot{w}_r) + \frac{b}{6} (\ddot{M}_{r+1}^* - N \ddot{w}_{r+1}) \quad (9)$$

$$S_{r,r-1} = \frac{1}{b} (M_r^* - M_{r-1}^*) - \frac{N}{b} (w_r - w_{r-1}) - \frac{b}{3} (\ddot{M}_r^* - N \ddot{w}_r) - \frac{b}{6} (\ddot{M}_{r-1}^* - N \ddot{w}_{r-1}) \quad (10)$$

3. ラニカ-ポレート の理論式

接合線にわたる接角 θ の適合条件と剪断力 S の釣り合いより次式を得る。

$$\frac{1}{b} \Delta^2 w_{r-1} + \frac{b}{6N} (6M_r^* + \Delta^2 M_{r-1}^*) = 0 \quad (11)$$

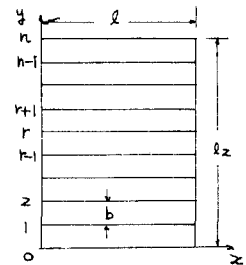


図2

$$\frac{1}{6} \Delta^2 r M_{r-1}^* - \frac{N}{6} \Delta^2 r \ddot{w}_{r-1} + \frac{b}{6} (6 M_r^* + \Delta^2 r M_{r-1}^*) - \frac{bN}{6} (6 \ddot{w}_r + \Delta^2 r \ddot{w}_{r-1}) + P_r = 0 \quad (13)$$

(12), (13) 式を和分変換し、 $\gamma=1$ 変換して、 $\gamma=0, \gamma=1$ の境界条件を代入する。

$$\frac{1}{6} D_i S_i[\ddot{w}_{rm}] - \frac{b}{N} (1 - \frac{D_i}{6}) S_i[M_{rm}^*] = 0 \quad (14) \quad \text{さらに} \quad D_i = 2(1 - \cos \frac{i\pi}{L})$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{D_i}{6} + b(1 - \frac{D_i}{6}) (\frac{M_{r-1}^*}{6})^2 \right\} S_i[M_{rm}^*] + \left\{ \frac{N}{6} D_i (\frac{M_{r-1}^*}{6})^2 + bN(1 - \frac{D_i}{6}) (\frac{M_{r-1}^*}{6})^4 \right\} S_i[\ddot{w}_{rm}] = -b(1 - \frac{D_i}{6}) (\frac{M_{r-1}^*}{6}) \times \\ & \left\{ S_i[M_{r-1}^*](-1)^m - S_i[M_{r-1}^*] \right\} - \frac{N}{6} D_i (\frac{M_{r-1}^*}{6}) \left\{ S_i[\ddot{w}_{r-1}](-1)^m - S_i[\ddot{w}_{r-1}] \right\} + bN(1 - \frac{D_i}{6}) (\frac{M_{r-1}^*}{6}) \times \\ & \left\{ S_i[\ddot{w}_{r-1}](-1)^m - S_i[\ddot{w}_{r-1}] \right\} - bN(1 - \frac{D_i}{6}) (\frac{M_{r-1}^*}{6})^3 S_i[\ddot{w}_{r-1}](-1)^m - S_i[\ddot{w}_{r-1}] + S_i[\ddot{P}_{rm}] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\text{さらに} \quad S_i[\ddot{w}_{rm}] = \sum_r \left(\int_0^L w_r(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx \right) \sin \frac{i\pi r}{L}, \quad S_i[M_{rm}^*] = \sum_r \left(\int_0^L M_r^*(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx \right) \sin \frac{i\pi r}{L}$$

$$S_i[\ddot{P}_{rm}] = \sum_r \left(\int_0^L P_r(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx \right) \sin \frac{i\pi r}{L}, \quad \text{境界条件より} \quad w_{(0)} = 0, \quad M_{(0)}^* = 0 \quad \text{となる。}$$

(14), (15) 式より $S_i[M_{rm}^*], S_i[\ddot{w}_{rm}]$ に関する解を得、 x 方向に $\gamma=1$ 変換する。

$$S_i[M_r^*] = \frac{2b^3}{a_0 m^4} \left[\left\{ P(3) + P(1-3) \right\} S_i[M_{r-1}^*] + \left\{ Q_1(3) + Q_1(1-3) + Q_2(3) + Q_2(1-3) \right\} S_i[\ddot{w}_{r-1}] \right. \\ \left. + \left\{ R(3) + R(1-3) \right\} S_i[\ddot{w}_{r-1}] + S_i[\ddot{P}_r] \right] \quad (16)$$

$$S_i[\ddot{w}_{rm}] = \frac{b^2}{ND_i} (1 - \frac{D_i}{6}) S_i[M_r^*] \quad (17) \quad \text{さらに} \quad P(3), Q_1(3), Q_2(3), R(3) \text{ は}$$

m に関する無限級数となる。部分分数に分けて級数展開し、閉じた式で表わされる。

$$a_{10} \text{ は } m^4 \text{ の項(分母)の係数。} \quad S_i[\ddot{P}_r] = \sum_m \frac{1}{m^4 + a_{20}m^2 + a_{30}} S_i[\ddot{P}_{rm}] \sin \frac{m\pi x}{L}$$

$$\bar{a}_{20} = \frac{a_{20}}{a_0} (\frac{L}{\pi})^2, \quad \bar{a}_{30} = \frac{a_{30}}{a_0} (\frac{L}{\pi})^4, \quad a_{10} = \frac{b^3}{D_i} (1 - \frac{D_i}{6}), \quad a_{20} = 2b(1 - \frac{D_i}{6}), \quad a_{30} = \frac{1}{6} D_i$$

4. 境界条件

荷重、変形を対称と考える。境界では $S_i[M_{r-1}^*], S_i[\ddot{w}_{r-1}], S_i[\ddot{w}_{r-1}] \equiv 0$ である。境界値は m である。これを $m=1$ とする。1) $x=0$ における接角の適合条件。2) $x=0$ における剪断力の釣り合い。

3) $x=0$ における自由の条件。以上を本境界条件式を立てる。

$$1) \text{ の条件より} \quad \frac{1}{6} D_i S_i[\ddot{w}_{r-1}] - \frac{b}{N} (1 - \frac{D_i}{6}) S_i[M_{r-1}^*] = 0 \quad (18)$$

$$2) \text{ の条件より} \quad S_{r+1}(0) - S_{r-1}(0) + S_{r-1}(0) = 0 \quad (19) \quad \text{さらに}$$

$$S_r(0) = -N \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \Delta w + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\}, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$S_{r+1} = \frac{1}{6} (M_{r+1}^* - M_r^*) - \frac{N}{6} (\ddot{w}_{r+1} - \ddot{w}_r) + \frac{(2-\nu)b}{6} [2(M_r^* - N\ddot{w}_r) + (M_{r+1}^* - N\ddot{w}_{r+1})] \\ - (1-\nu)N \left[\frac{1}{6} (\ddot{w}_{r+1} - \ddot{w}_r) + \frac{b}{6} (2\ddot{w}_r + \ddot{w}_{r+1}) \right] \quad (20)$$

$$S_{r-1} = \frac{1}{6} (M_r^* - M_{r-1}^*) - \frac{N}{6} (\ddot{w}_r - \ddot{w}_{r-1}) - \frac{(2-\nu)b}{6} [2(M_r^* - N\ddot{w}_r) + (M_{r-1}^* - N\ddot{w}_{r-1})] \\ - (1-\nu)N \left[\frac{1}{6} (\ddot{w}_r - \ddot{w}_{r-1}) - \frac{b}{6} (2\ddot{w}_r + \ddot{w}_{r-1}) \right] \quad (21) \quad (20), (21) \text{ 式を (19) 式に代入して和分変換}$$

$$\text{する。} \quad - \frac{D_i}{6} S_i[M_{r-1}^*] - \frac{(2-\nu)ND_i}{6b} S_i[\ddot{w}_{r-1}] + (2-\nu)b(1 - \frac{D_i}{6}) (S_i[M_{r-1}^*] - N S_i[\ddot{w}_{r-1}]) - (1-\nu)bN(1 - \frac{D_i}{6}) \times \\ S_i[\ddot{w}_{r-1}] + S_i[S_{r-1}(0)] = 0 \quad (22) \quad S_i[S_{r-1}(0)] = \sum_r S_{r-1}(0) \sin \frac{i\pi r}{L}$$

$$3) \text{ の条件より} \quad \nu S_i[M_{r-1}^*] - N S_i[\ddot{w}_{r-1}] = 0 \quad (23)$$

$S_{r-1} = \frac{EA}{L_{str}} (w_r - w_{r-1})$ であり、また下側の水平方向の力より w_r を解けば境界値は決定される。さらに A_{str} は下側の鉛直部材の断面積と部材長。 w_r は下側の下側変位。5. まとめ。

数値計算例の例としてこの問題を数値的に解く。当日発表し、これを考える。下の構造は図1-1の形式で、同様の手法で解析できる。

文献1) Nomachi, Ozaki, Matsuoka: On a Method of Stress Calculation for the Bending of Plate by Means of Long Strip Elements: Proc. of the 19th Jap. Nat. Conf. Appl. Mech. (1969)

2) Timoshenko, Krieger: Theory of Plate and Shells (McGraw-Hill, 1940)

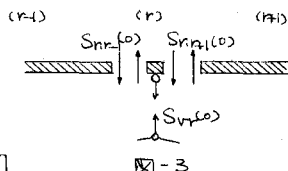


図-3