

大塚組 正員 ○ 坂島 敏一郎
名古屋大学 正員 梶田 建夫
名古屋大学 正員 成岡 昌夫

1. まえがき

せん断変形を考慮した厳密な板の理論の誘導については、E. Reissner と R. Mindlin によるものがよく知られている。また、Gurtmann は、Reissner の板理論を直交異方性板へ拡張している。有限要素法によるせん断変形を考慮した板の解析は、Frederick、あるいは、Pryor らにより行なわれており、後者は、直交異方性多層板へも拡張している。

ここでは、Mindlin の板理論に基づいて、直交異方性板の有限要素解析を行なった。そこで、まず、Mindlin の板理論を直交異方性板に拡張した。そして、有限要素解析に用いる剛性マトリックスの作成には、Frederick が示した未定係数 12 個の変位関数を用いることにした。解析の対象とした直交異方性板は、等分布荷重が満載し、周辺単純支持された正方形板で、板のたわみ、曲げモーメントの計算を行なった。また、Frederick の変位関数を拡張して、直交異方性多層板の解析を行なった。ここでは、周辺単純支持された 4 層の直交異方性板および、相対した両辺が単純支持された 1 層、3 層の直交異方性無限板のたわみの計算を行なった。これらの板の解析については、Pagano, N.J. が、弾性解を示しているので、これと計算結果とを比較を行なった。

2. Mindlin 理論による直交異方性板の解析

せん断変形を考慮した場合の等方性板の理論から、直交異方性板への拡張は、Mindlin の式の誘導の過程で、板の直交異方性を考慮した弾性定数を代入することにより、容易に誘導できる。しかしながら、数値計算を行なうにあたっては、板剛度、ねじり剛度、せん断弾性係数の仮定を行なわなければならない。そこで、計算に用いられた直交異方性板は、図 1 に示されているような、 x - z 断面が等方性となり、 $\nu_{xy} = \nu_{yx}$, $\nu_{xz} = \nu_{zx}$, $\nu_{yz} = \nu_{zy}$ とする板である。また、Huber が誘導したたわみ曲面の微分方程式で、 $H^2/D_0 = 1$ という場合について、板剛度、ねじり剛度、せん断弾性係数の仮定を行なった。

数値計算は、周辺単純支持された正方形板に、等分布荷重 $q = 1.0$ が満載した場合について行

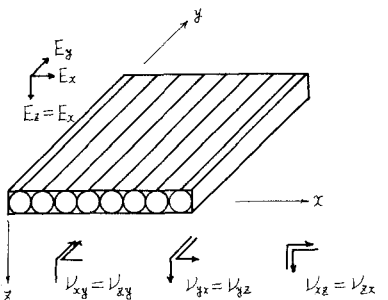
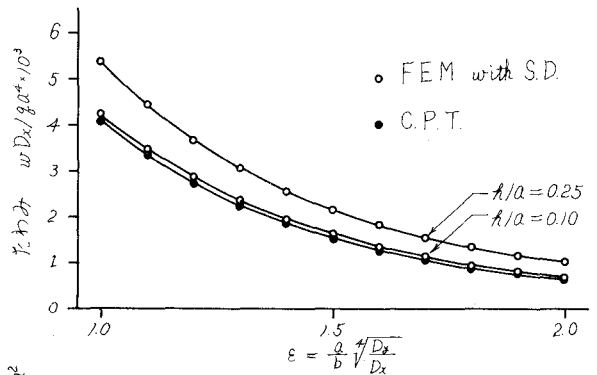
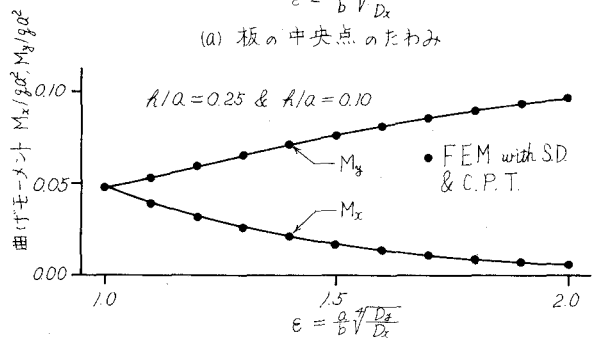


図 1 直交異方性板



(a) 板の中央点のたわみ



(b) 板の中央点の曲げモーメント

図 2 周辺単純支持された直交異方性板の中央点のたわみ、曲げモーメント

また、板剛度の比は、 $D_y/D_x = 6.025$ 、ポアソン比は、 $\nu_y = 0.0625$ である。その結果、板厚比を変化させた場合、せん断変形がたわみに及ぼす影響は、等方性板とほぼ同様であることが示された。すなわち、板厚比が小さくなると、せん断変形の影響は小さく、板厚比が大きくなると、せん断変形によるたわみは増大する。たとえば、板厚比が、 $h/a = 0.1$ のとき、せん断変形によるたわみは、古典的な理論値に対して、8%、 $h/a = 0.2$ のとき、30%の増加を生じる。また、曲げモーメント M_x 、 M_y に及ぼす影響は、ほとんど見られない。図2には、 $\epsilon = \frac{w}{a} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}$ の値による板の中央点のたわみ w 、曲げモーメント M_x 、 M_y の変化を示した。

3. 直交異方性多層板の解析

多層板の解析に用いる長方形有限要素の節点変位は、面内方向への変位 u 、 v と、たわみ w 、 y 軸、 x 軸方向の回転、 α_x 、 α_y を考え、つぎのようになる。

$$\{u\} = \{u^0 \quad v^0 \quad w \quad \alpha_x \quad \alpha_y\}^T$$

これらの変位についての変位関数は、 w 、 α_x 、 α_y については、Frederickが示した変位関数を用いて、つぎのように表わされる。

$$u^0 = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \quad v^0 = \alpha_5 + \alpha_6 \xi + \alpha_7 \eta + \alpha_8 \xi \eta$$

$$w = \alpha_9 + \alpha_{10} \xi + \alpha_{11} \eta + \alpha_{12} \xi \eta + \alpha_{13} \frac{\xi^2}{2} + \alpha_{14} \frac{\eta^2}{2} + \alpha_{15} \frac{\xi^2}{2} + \alpha_{16} \frac{\eta^2}{2}$$

$$\alpha_x = \alpha_{17} + \alpha_{18} \xi + \alpha_{19} \eta + \alpha_{20} \xi \eta \quad \alpha_y = \alpha_{21} + \alpha_{22} \xi + \alpha_{23} \eta + \alpha_{24} \xi \eta$$

この変位関数の特徴は、未定係数が20個であり、Pryorらが、直交異方性多層板の解析に用いた変位関数の未定係数より8個も少ないことである。

数値計算は、4層のGlass-Epoxy、Graphite-Epoxyの直交異方性材料からなる正方形板が、周辺単純支持され、 $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ の荷重をうける場合と、Graphite-Epoxy材料からなる、1層、および、3層の無限板に、 $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a}$ の荷重が作用する場合について行った。これらの計算結果を図3、4、5に示す。それぞれの図で、計算値が、Paganoが求めた弾性解、ならびに、Pryorによる結果と比較されている。4層の周辺単純支持された板では、Pryorらの計算値が、弾性解に近い値を示している。無限板の計算では、ここで用いた変位関数による計算結果は、Pryorらによるものよりも、弾性解に近い値を示している。

4. あとがき

以上、Frederickが示した変位関数、および、それを多層板へ拡張した変位関数を用いて、直交異方性板を解析した。無限板の解析については、ここで用いた変位関数は、Pryorらを用いた変位関数より、精度の良いことが示された。

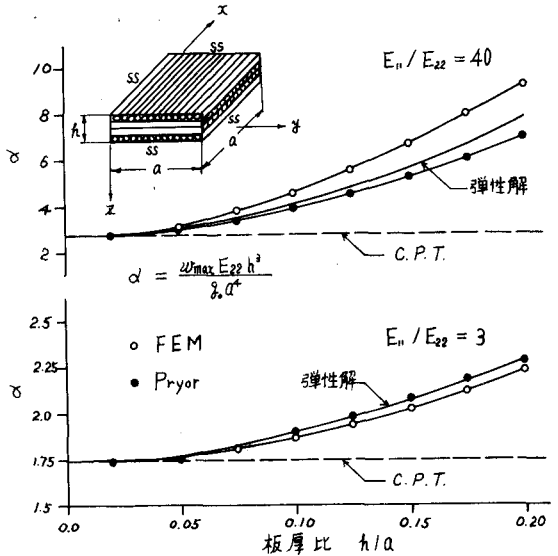


図3 周辺単純支持された直交異方性多層板の中央点のたわみ

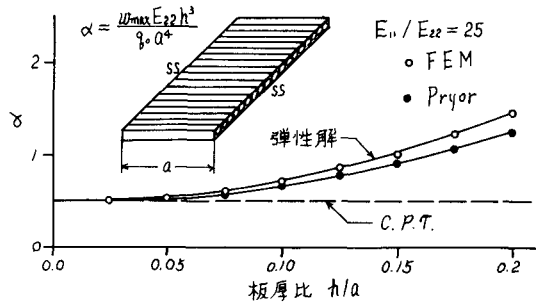


図4 1層・無限板のたわみ

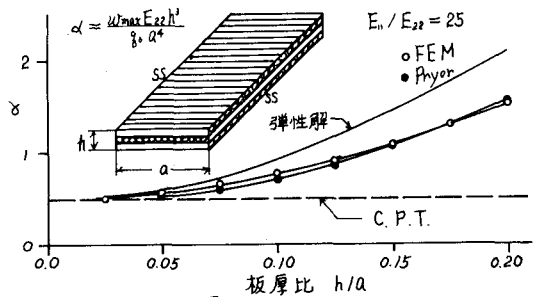


図5 3層の無限板のたわみ