

北海道大学 正員 渡辺 昇
 北海道大学 正員 佐藤 浩一
 北海道大学 学生員 〇松 元 照 幸

1. まえがき

本報告は2本の主桁で単純支持された閉じリブ鋼床版(図-1)において中間支点が弾性横桁で支持された多径間連続直交異方性板の解析を剛支承上の構造系と弾性支承上の構造系に分けて解析している W. Pelican u. M. Esslinger の解法と比較しながら行ったものである。

2. 解析の概要

解析するにあたり、図-2のように中間弾性支持部を切断し、代わりに分布鉛直荷重 $\sin \frac{n\pi}{a} b_j x(m) f(m) \sin \frac{n\pi}{a} x$ を挿入していく方法である。

ここで、 i, j は中間弾性支持部の数だけ変化する

b_i は i 番目の支点から $i+1$ 番目の支点までの長さである

$\sin \frac{n\pi}{a} b_j x(m) f(m) \sin \frac{n\pi}{a} x$ は状態 j の時の i 番目の弾性支持部に挿入する不静定線分布鉛直荷重である。

3. 多径間連続直交異方性板の解析(直交条件を利用)

三径間連続直交異方性板の場合は図-2において、 $m=1, 2$ である。したがって、 $i=1, 2$ $j=1, 2$ である。図-3の中間の弾性支持部を切断し、不静定線分布鉛直力を挿入する(図-4、図-5参照)。 $jx(m)$ の j は状態 j を表わし、 i はその時の支点番号 i を表わし、 n は級数の項数を示している。このような不静定線分布荷重による変形は図-6のようになる。ここで、 f, γ について列挙すれば次のようになる。

$$k f_j = i k_g x \sin \frac{n\pi}{a} b_j x \times f(m) \times \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (1)$$

$$k_g \gamma_j = G \times \sin \frac{n\pi}{a} b_j x \times f(m) \times \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (2)$$

添字について説明すれば $k f_j$ は状態 j の時の支点 i に鉛直力が作用する場合の支点 j の変位を表わしている。また、状態1は図-6(a)と図-6(b)を加えたものであり、状態2は図-6(c)と図-6(d)を加えたものである。ここで、

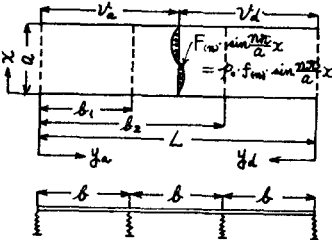


図-3

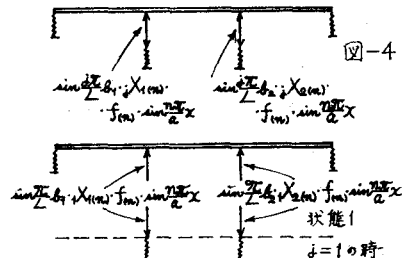


図-5

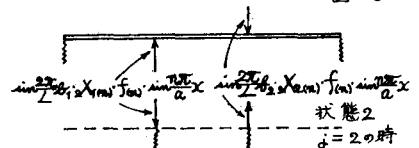
$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \sqrt{\frac{2H}{K_g}} \quad (3) \quad K_g = \text{単位幅当りの板の曲げ剛性} \quad (4)$$

$$f(m) = \frac{2}{a} \sin \frac{n\pi}{a} \xi \quad (\text{集中荷重}), \quad \frac{4}{a} \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{n\pi}{a} C \quad (\text{分布荷重}) \quad (5)$$

$$F(m) = P \cdot f(m) \quad (6) \quad C_w = \frac{K_g \alpha_n^2}{EJ \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4} \quad (7)$$

とすれば、 $G, i k_g$ は次式によって定義される。

$$G = \frac{1}{EJ \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4} \quad (8) \quad EJ \text{ は横桁の曲げ剛性}$$



$$iK_j = \begin{cases} -\frac{1}{K_y} \frac{1}{\alpha_n^3} \left\{ \frac{\sinh \alpha_n b_i}{\sinh \alpha_n L} \sinh \alpha_n (L - b_j) - \frac{\alpha_n b_i + C_w}{\alpha_n L + 2C_w} \{ \alpha_n (L - b_j) + C_w \} \right\} & i < j \\ -\frac{1}{K_y} \frac{1}{\alpha_n^3} \left\{ \frac{\sinh \alpha_n (L - b_i)}{\sinh \alpha_n L} \sinh \alpha_n b_j - \frac{\alpha_n (L - b_i) + C_w}{\alpha_n L + 2C_w} \{ \alpha_n b_j + C_w \} \right\} & i > j \end{cases} \quad (9)$$

次に、Maxwell-Betti の相反法則を用いれば（三径間連続直交異方性板の場合）

$$\int_0^a \left[\sin \frac{\pi}{L} b_1 i X_1(n) f(n) \sin \frac{\pi}{a} x \{ t_{11} f_1 + t_{12} f_2 \} + \sin \frac{\pi}{L} b_2 i X_2(n) f(n) \sin \frac{\pi}{a} x \{ t_{12} f_1 + t_{22} f_2 \} \right. \\ \left. + \sin \frac{2\pi}{L} b_1 i X_1(n) f(n) \sin \frac{2\pi}{a} x \{ t_{21} f_1 + t_{22} f_2 \} + \sin \frac{2\pi}{L} b_2 i X_2(n) f(n) \sin \frac{2\pi}{a} x \{ t_{21} f_1 + t_{22} f_2 \} - F(n) \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \delta_{10}(n) \right] dx = 0 \quad (10)$$

$$\int_0^a \left[\sin \frac{\pi}{L} b_1 i X_1(n) f(n) \sin \frac{\pi}{a} x \{ t_{21} f_1 + t_{22} f_2 \} + \sin \frac{\pi}{L} b_2 i X_2(n) f(n) \sin \frac{\pi}{a} x \{ t_{21} f_1 + t_{22} f_2 \} \right. \\ \left. + \sin \frac{2\pi}{L} b_1 i X_1(n) f(n) \sin \frac{2\pi}{a} x \{ t_{11} f_1 + t_{12} f_2 \} + \sin \frac{2\pi}{L} b_2 i X_2(n) f(n) \sin \frac{2\pi}{a} x \{ t_{11} f_1 + t_{12} f_2 \} - F(n) \sin \frac{2\pi}{a} x \cdot \delta_{20}(n) \right] dx = 0 \quad (11)$$

となる。式(10)および式(11)に式(1) 式(2)を代入して整理すれば、 $b_2 = 2b_1$

$iX_1(n) = iX_2(n)$, $2X_1(n) = 2X_2(n)$, $\int_0^a \sin^2 \frac{\pi}{a} x dx = \frac{a}{2}$ であり、式(10)、式(11)は

$$iX_1(n) \left\{ \sin^2 \frac{\pi}{L} b_1 + \sin^2 \frac{\pi}{L} b_2 \right\} A_1 + 2X_2(n) \left\{ \sin \frac{2\pi}{L} b_1 \sin \frac{\pi}{L} b_1 + \sin \frac{2\pi}{L} b_2 \sin \frac{\pi}{L} b_2 \right\} A_1 = F(n) \delta_{10}(n)$$

$$2X_2(n) \left\{ \sin^2 \frac{2\pi}{L} b_1 + \sin^2 \frac{2\pi}{L} b_2 \right\} A_2 + X_1(n) \left\{ \sin \frac{\pi}{L} b_1 \sin \frac{2\pi}{L} b_1 + \sin \frac{\pi}{L} b_2 \sin \frac{2\pi}{L} b_2 \right\} A_2 = F(n) \delta_{20}(n)$$

となり、直交条件 $\sum_{i=1}^2 \sin \frac{i\pi}{L} b_i \sin \frac{k\pi}{L} b_i = 0$ ($j \neq k$) (12)

を用いれば $jX(n) = \frac{P \cdot \delta_{j0}(n)}{A_j \sum_{i=1}^2 \sin^2 \frac{i\pi}{L} b_i}$ $j = 1, 2$ (13)

で不静定線分布荷重の $jX(n)$ が求まる。ここで、 A_j と $\delta_{j0}(n)$ を表示すれば

$$A_j = \sum_{i=1}^2 iK_i \frac{\sinh \frac{i\pi}{L} b_i}{\sinh \frac{2\pi}{L} b_i} + G = j \text{ に関する定数 } j=1, 2 \quad (14)$$

$$\delta_{j0}(n) = \sum_{i=1}^2 iK_i \alpha_i \sin \frac{i\pi}{L} b_i \quad (15)$$

で求まる。次に、一般に多径間連続直交異方性板（ $m+1$ 径間の場合）は

Maxwell-Betti の相反法則を用いれば、式(10)、式(11)に相当する式は

$$\int_0^a \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sin \frac{i\pi}{L} b_i i X_i(n) f(n) \sin \frac{j\pi}{a} x b_j - F(n) \sin \frac{j\pi}{a} x \delta_{j0}(n) \right] dx = 0 \quad (16)$$

ただし、 $i = 1, 2, 3, \dots, m$ （中間支点の数だけ）すなわち m 本の仕事連立方程式が得られる。

$$iX_j = \sum_{i=1}^m iK_j \sin \frac{j\pi}{L} b_i \cdot 1 \cdot f(n) \sin \frac{j\pi}{a} x + G \sin \frac{j\pi}{L} b_j \cdot 1 \cdot f(n) \sin \frac{j\pi}{a} x \quad (17)$$

とする。式(12)、式(13)、式(14) 式(15)と全く同様に誘導することができる。

$$\text{すなわち } jX(n) = \frac{P \cdot \delta_{j0}(n)}{A_j \sum_{i=1}^m \left(\sin \frac{i\pi}{L} b_i \right)^2} \quad j=1, 2, 3, \dots, m \quad (18)$$

不静定力 $jX(n)$ が求まれば、たわみ曲面 $W(n)(x, y)$ は

$$W(n)(x, y) = W_{0(n)}(x, y) + \sum_{j=1}^m W_{j(n)}(x, y) \cdot jX(n) \quad (19)$$

で求まる。ここで、 $W(n)(x, y)$ ：求める点のたわみ曲面

$W_{0(n)}(x, y)$ ：基本系における求める点のたわみ曲面

$W_{j(n)}(x, y)$ ：状態 j の時の求める点におけるたわみ曲面の値

$jX(n)$ ：式(18)で求まる不静定力

曲げモーメント、せん断力は $W(n)(x, y)$ を y について微分することによって求まる。また、弾性横桁の曲げモーメント、せん断力は $W(n)(x, y)$ を x について微分することによって求まる。

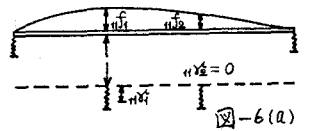


図-6(a)

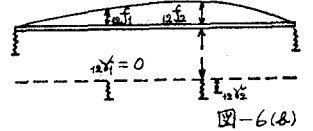


図-6(b)

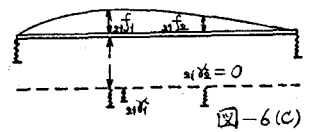


図-6(c)

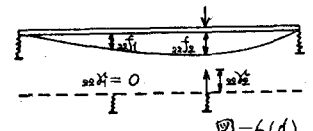


図-6(d)

4. 理論値と実験値

図-7のような三径間連続直交異方性板を例にとり
数値計算と模型実験を行なった。用いた寸法、断面諸
元は図-7の通りである。また、 $K_y = 8.4492 \times 10^6 \text{ kg/cm}$
 $EJ = 5.0751 \times 10^6 \text{ kg cm}^2$, $H = 1.65717 \times 10^5 \text{ kg cm}^2/\text{cm}$,
 $p = 80 \text{ kg/cm}^2$, 板厚 = 0.23 cm とした。
 $n = 98$ 項まで

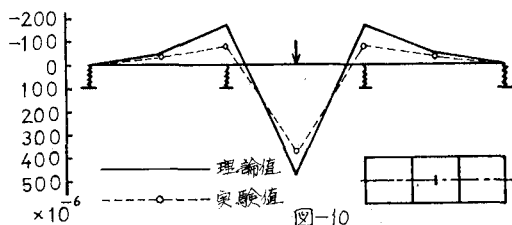
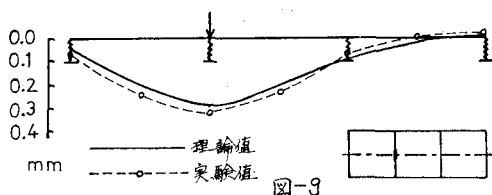
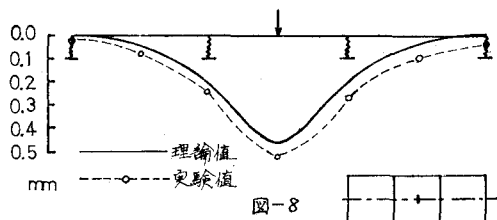
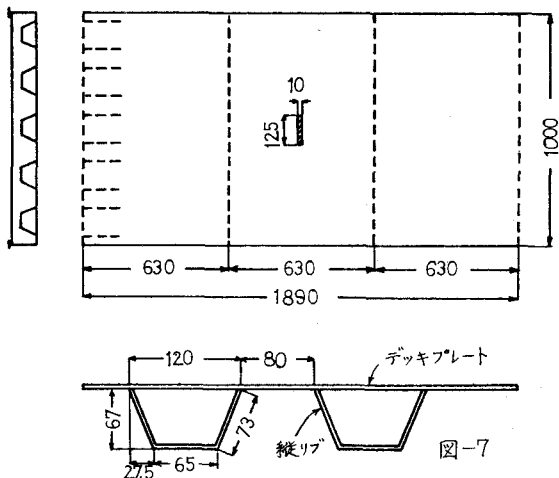
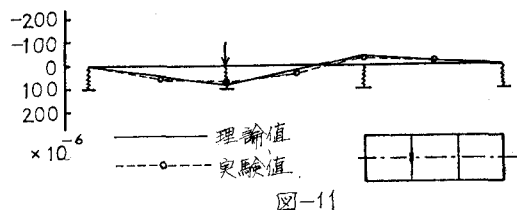


図-8 は中央径間中央に載荷した時のたわみである。
図-9 は弾性横桁中央に載荷した時のたわみである。
図-10 は中央径間中央に載荷した時のひずみである。
図-11 は弾性横桁中央に載荷した時のひずみである。
図-8 から図-11 において、理論値と実験値とがほぼ一致
している事がわかる。



5. あとがき

本解析法は弾性横桁で支持された直交異方性板の解析を剛支承上の構造系と弾性支承上の構造系に分けずに境界条件に弾性横桁を考慮して微分方程式を解き、その解を基本にして、中間弾性支点を切断して、不静定線分布鉛直荷重(組荷重群) $\sin \frac{\pi x}{a} \cdot f_m \cdot \sin \frac{\pi y}{a}$ を挿入し、仕事連立方程式をつくり、要素 δ_{ii} 以外は全部零要素となるように、直交条件を用いて解くので、逆マトリックスを求める必要はなく、不静定力がすぐに求まる。また、組荷重群を用いずに、中間弾性支点を切断して、不静定線分布鉛直荷重 $\delta(x, y, f_m) \cdot \sin \frac{\pi x}{a}$ を1つずつ挿入し、仕事連立方程式をつくり、逆マトリックスを求めていく方法とも比較したが全く一致している。

なお、W. Pelican u. M. Eulinger の解法との比較については当日発表の予定である。

最後に、本報告における数値計算には、北海道大学大型計算機センターの Facom 230-60 を用いた。

模型実験については、日本鋼管株式会社のご援助を得たので謝意を表したい。

参考文献

1. 渡辺昇：橋の影響線の理論と計算法，現代社
2. 国広哲男・藤原稔：直交異方性版理論による鋼床版実用設計法，土木研究所報告 130号の1, 690号(補遺)
3. W. Pelican u. M. Eulinger：Die Stahlfahrbahn Berechnung und Konstruktion, M.A.N. Forschungsheft Nr. 7, 1957