

大阪市立大学 工学部 正員

倉田宗章

〃

〃

〇園田恵一郎

〃

大学院 学生員

岸本修治

序; 引張強度と圧縮強度が異なる弾塑性材料から成る平板の曲げモーメントとせん断力に関する降伏条件およびそれに基づく極限解析法を提案し、それらをRC床板の極限強度決定問題に応用した。

1. 引張強度と圧縮強度が異なる平板の降伏条件式

平板材料の降伏条件として、Mises の式を変形した次式を用いる。 $\alpha k J_1 + J_2 = k^2$ ----- (1)
 こゝに J_1, J_2 は応力の不変量, α, k は材料定数である。 平板の面内に x, y 軸, 面に垂直に z 軸をとり、こゝで考えている問題では、 σ_z の降伏条件に与える影響は無視する。すると式(1)は、

$$F = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + \sqrt{3} \alpha \sigma_0 (\sigma_x + \sigma_y) + 3 \tau^2 = \sigma_0^2 \text{ ----- (2)}$$

こゝに $\sigma_0 = \sqrt{3} k$, $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}$, なお、一軸圧縮降伏応力に対する一軸引張応力の比を δ とすれば、 $\alpha = (1 - \delta) \sqrt{1/3\delta}$ の関係がある。

(a) 静的許容応力場からのアプローチ (下界)

図1に示す一定応力場から成る応力状態を考え、 x, y 軸を主モーメント方向にとる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_0^h \sigma_x dz = h \{ \eta \sigma_{x1} + (1 - \eta) \sigma_{x2} \} = 0 \\ N_y &= \int_0^h \sigma_y dz = h \{ \eta \sigma_{y1} + (1 - \eta) \sigma_{y2} \} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ ----- (3)}$$

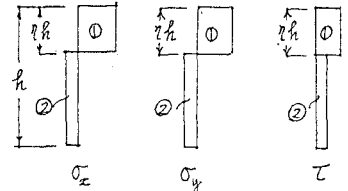


図-1

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_0^h \sigma_x z dz = -\frac{h^2 \eta}{2} \sigma_{x1}, \quad M_y = \int_0^h \sigma_y z dz = -\frac{h^2 \eta}{2} \sigma_{y1}, \\ Q &= \int_0^h \tau dz = h \{ \eta \tau_{x1} + (1 - \eta) \tau_{x2} \} \end{aligned} \right\} \text{ ----- (4)}$$

式(2), (3), (4)より、一定の M_x, M_y に対して Q が極大になる関係を求めれば、 $\eta = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \alpha (M_x + M_y)$, として、

$$(1 + \frac{3}{4} \alpha^2) M_x^2 - (1 - \frac{3}{2} \alpha^2) M_x M_y + (1 + \frac{3}{4} \alpha^2) M_y^2 + \frac{3 h^2}{16} Q^2 = M_0^2 \text{ ----- (5)}$$

こゝに $M_0 = \sigma_0 h^2 / 4 = \sqrt{3} k h^2 / 4$, なお、 x, y 軸が主モーメントの方向と一致しない場合は、

$$(1 + \frac{3}{4} \alpha^2) M_x^2 - (1 - \frac{3}{2} \alpha^2) M_x M_y + (1 + \frac{3}{4} \alpha^2) M_y^2 + 3 M_{xy}^2 + \frac{3 h^2}{16} Q^2 = M_0^2 \text{ ----- (6)}$$

(b) 運動学的許容速度場からのアプローチ (上界)

断面のひずみ速度分布をつぎのように仮定する。

$$\dot{\epsilon}_x = k_x (\eta + z), \quad \dot{\epsilon}_y = k_y (\xi + z), \quad \dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_x, \quad \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_y \text{ ----- (7)}$$

こゝに k_x, k_y は曲率速度, η, ξ はひずみ速度が零である位置を表わすパラメーターである。

塑性流れ法則より、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = d\lambda (2\sigma_x - \sigma_y + \sqrt{3} \alpha \sigma_0), \quad \dot{\epsilon}_y = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} = d\lambda (2\sigma_y - \sigma_x + \sqrt{3} \alpha \sigma_0), \\ \dot{\gamma} &= \sqrt{\dot{\gamma}_{xz}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \tau} = 6d\lambda \tau, \quad \text{こゝに } d\lambda \text{ は塑性流れ係数, } d\lambda > 0 \end{aligned} \right\} \text{ (8)}$$

式(7), (8)より、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\sigma_0} &= \Phi(\mu) \frac{2\mu\eta + \xi + (2\mu + 1)\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + f(\xi, \eta)\gamma + g(\xi, \eta, \lambda)}} - \sqrt{3} \alpha, \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_0} = \Phi(\mu) \frac{2\xi + \mu\eta + (2 + \mu)\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + f(\xi, \eta)\gamma + g(\xi, \eta, \lambda)}} - \sqrt{3} \alpha, \\ \frac{\tau}{\sigma_0} &= \frac{\Phi(\mu)}{2} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + f(\xi, \eta)\gamma + g(\xi, \eta, \lambda)}}, \quad \Phi(\mu) = \frac{\sqrt{3(1 + 3\alpha^2)}}{3\sqrt{1 + \mu + \mu^2}}, \quad f(\xi, \eta) = \frac{2\xi + 2\eta\mu^2 + (\xi + \eta)\mu}{1 + \mu + \mu^2} \end{aligned} \right\} \text{ (9)}$$

$$g(\xi, \eta, \lambda) = \frac{\xi^2 + \eta^2 \mu^2 + \eta \xi \mu + \lambda^2}{1 + \mu + \mu^2}, \quad \mu = \dot{k}_x / \dot{k}_y, \quad \lambda = \dot{\gamma} / 2 \dot{k}_y.$$

式(9)を用いて、膜力 N_x, N_y を零に保ちながら、 M_x, M_y, Q の関係を求めれば、上界の降伏条件式が得られる。降伏曲面の対称断面 $M_x = M_y$, $M_x = -M_y$ に関して、上界の降伏条件を数値的に求め、下界のそれと比較すれば、図-2 のようになる。

2. RC床板の降伏条件式

二軸圧縮状態でのコンクリートの降伏(破壊)はモール・クローソンの式に従うものとし、引張領域での強度は無視する。図-4 の一定応力場による応力状態を考え、無次元化した断面力を導入する。

$$\begin{aligned} m_x &= M_x / M_{x0}, \quad m_y = M_y / M_{y0}, \quad q_x = Q_x / Q_0, \\ q_y &= Q_y / Q_0, \quad \text{ここに } M_{x0} = k^2 t_x (d' - 0.5 t_x), \\ M_{y0} &= k^2 t_y (d' - 0.5 t_y), \quad Q_0 = 0.5 d' h \sigma_0, \quad d' = d / h, \\ t_x &= t_x \sigma_{sy} / \sigma_0, \quad t_y = t_y \sigma_{sy} / \sigma_0, \quad t_x, t_y: \text{鉄筋比}, \\ \sigma_{sy}: \text{鉄筋の降伏応力}, \quad \sigma_0: \text{コンクリートの一軸圧縮降伏応力} \end{aligned}$$

鉄筋のせん断抵抗を無視し、 $Q_x \geq 0, Q_y = 0$ の場合の RC床板の降伏時の断面力の関係を求めれば、

$$\begin{aligned} m_x &\geq \frac{2}{2d' - t_x} \left(d' - \frac{t_x}{1 - \sin \phi} \right) \text{ の時,} \\ t_x (2d' - t_x) (m_x - 1) + \frac{1}{4} q_x^2 &= 0 \\ m_y &= 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} m_x &\geq \frac{2}{2d' - t_x} \left(d' - \frac{t_x}{1 - \sin \phi} \right) \text{ の時,} \\ t_x (2d' - t_x) (m_x - 1) + \frac{1}{4} q_x^2 &= 0 \\ m_y &= 1 \end{aligned}} \right\} (10-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d'}{2d' - t_x} \leq m_x \leq \frac{2}{2d' - t_x} \left(d' - \frac{t_x}{1 - \sin \phi} \right) \text{ の時,} \\ m_x + \frac{q_x}{2(2d' - t_x) \tau_0'} &= \frac{2d' \tau_0' + t_x \tan \phi}{\tau_0' (2d' - t_x)} \\ m_y &= 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{d'}{2d' - t_x} \leq m_x \leq \frac{2}{2d' - t_x} \left(d' - \frac{t_x}{1 - \sin \phi} \right) \text{ の時,} \\ m_x + \frac{q_x}{2(2d' - t_x) \tau_0'} &= \frac{2d' \tau_0' + t_x \tan \phi}{\tau_0' (2d' - t_x)} \\ m_y &= 1 \end{aligned}} \right\} (10-2)$$

$$\begin{aligned} m_x \leq \frac{d'}{2d' - t_x} \text{ の時,} \\ -t_x (2d' - t_x) \tan \phi m_x + \frac{\delta_x}{2} &= \tau_0' d' \\ m_y &= 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} m_x \leq \frac{d'}{2d' - t_x} \text{ の時,} \\ -t_x (2d' - t_x) \tan \phi m_x + \frac{\delta_x}{2} &= \tau_0' d' \\ m_y &= 1 \end{aligned}} \right\} (10-3)$$

ここに $\tau_0' = \tau_0 / \sigma_0$ 。

3. 軸対称荷重を受ける円板の極限解析法

下界定理に基づく数値解析法を考える。無次元化したモーメントおよびせん断力を導入する。 $m = M_r / M_{r0}$, $t = M_\theta / M_{\theta 0}$, $\delta = Q / Q_0$, $\delta_m = M_{\theta 0} / M_{r0}$, $\delta_g = Q_0 Q / M_{r0}$ (a は円板の半径), すると極限荷重 P の決定問題は、

$$\begin{aligned} \text{Maximize } P \\ F(m, t, \delta) \leq 1 \end{aligned}$$

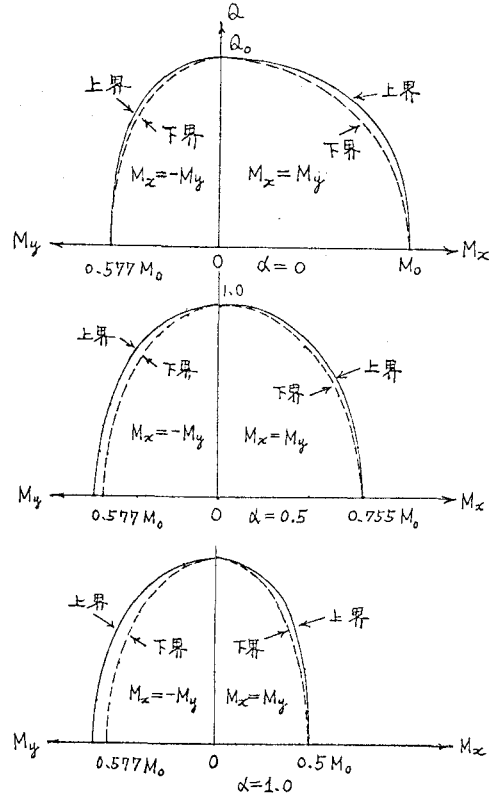


図-2

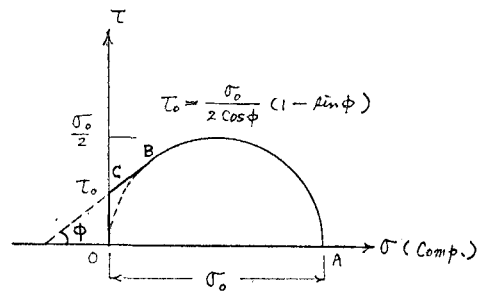


図-3 モール・クローソンの式

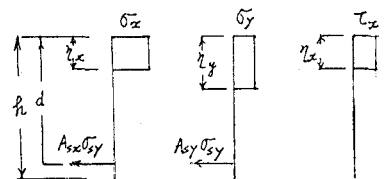


図-4

$$\left. \begin{aligned} m &= m_0 P + \bar{m}, \quad t = t_0 P + \bar{t}, \quad g = g_0 P \\ \bar{m} + g \frac{d\bar{m}}{dP} - \bar{t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

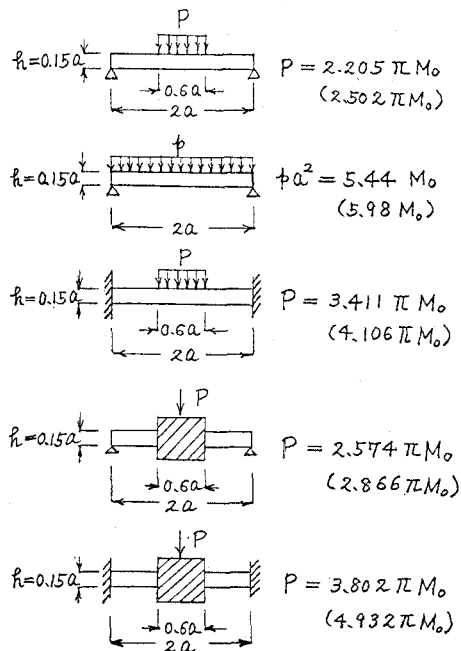
こゝに $P = r/a$, m_0 , t_0 , g_0 は単位荷重 $P=1$ とつり合うモーメント, せん断力であり, こゝでは弾性解を適用する。 $\bar{m}$, $\bar{t}$ は零荷重とつり合うモーメントである。式(11)における微分式を差分式に置き換え, 降伏関数 F を Dantzig-Wolfe の Inner Linearization Method により線型化すれば, 式(11)の問題は,

$$\left. \begin{aligned} &\text{Maximize } P \\ &\sum_{k=1}^r \alpha_k^R = 1, \quad \sum_{k=1}^r \alpha_k^R \bar{g}_k - P g_{0i} = 0, \\ &\sum_{k=1}^r \alpha_k^R (\bar{m}_k - \delta_m \bar{t}_k) + \frac{P_i}{2\Delta} \left(\sum_{k=1}^r \alpha_{i+1}^R \bar{m}_k - \sum_{k=1}^r \alpha_{i-1}^R \bar{m}_k \right) - P (m_{0i} - \delta_m t_{0i}) \\ &\quad - P g_{0i} \left(\frac{dm_0}{dP} \right)_i = 0 \\ &\alpha_k^R \geq 0, \quad \Delta = a/n-1, \quad g_{0i} = r_i/a, \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

こゝに n は網目数, $\bar{m}_k$, $\bar{t}_k$, $\bar{g}_k$ ($k=1, 2, \dots, r$) は降伏曲面 $F(m, t, g) = 1$ 上に選んだ代表点の座標を表す。式(12)は線形計画の問題であり, シンプレックス法に解くことができる。

4. 計算例

第一の例として, 均質板(式(6))において, $\alpha = 0$ とした場合)を取り上げ, $(\bar{m}_k, \bar{t}_k, \bar{g}_k)_{k=1, 2, \dots, r} = (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (-1, 0, 0), (-1, -1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1)$ とした時の計算値を示し, 第二の例として, 単鉄筋RC床板(式(10)の降伏条件式を適用)を取り上げ, $(\bar{m}_k, \bar{t}_k, \bar{g}_k)_{k=1, 2, \dots, r} = (0, 0, 0), (1, 0, 0), [\frac{2}{2d'-t_x}(d' - \frac{t_x}{1-\sin\phi}), 0, 2t_x \tan\phi + \frac{4t_0't_x}{1-\sin\phi}], [\frac{d'}{2d'-t_x}, 0, 2(t_0'd' + t_x \tan\phi)], (0, 0, 2t_0'd'), (0, 1, 0), (1, 1, 0), [\frac{2}{2d'-t_x}(d' - \frac{t_x}{1-\sin\phi}), 1, 2t_x \tan\phi + \frac{4t_0't_x}{1-\sin\phi}], [\frac{d'}{2d'-t_x}, 1, 2(t_0'd' + t_x \tan\phi)], (0, 1, 2t_0'd')$ とした時の計算結果を示す。



() 内はせん断力無視した場合の値

図-5 各種円板の極限荷重(均質板)

表1 極限荷重の計算値(α^2/M_0), (均質板, 単純支持)

β	Number of Mesh (n)						せん断力無視した時 ($n=12$)
	5	6	7	8	9	10	
1.0	5.32	5.37	5.40	5.42	5.43	5.44	5.98 (6.0*)
0.3	24.5	24.8	24.4	24.2	24.5	24.5	27.8 (27.8*)

* Hopkins, Prager による解析解

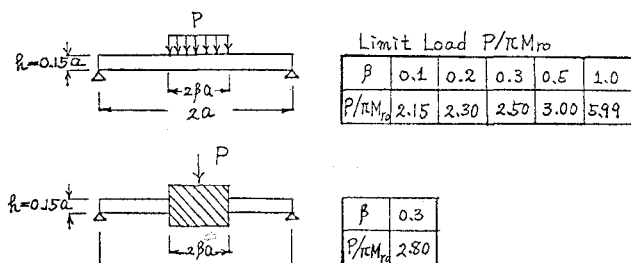


図-6 RC床板の極限荷重 ($\phi=37^\circ$, $t_r=t_0=0.1$, $d=h$)