

大阪工業大学

正員・岡村宏一

東洋技術コンサルタント

〃 〇島田 功

1. まえがき

筆者はすでに格闘長に対して、厚さの比率の大きいスラブ構造の応力分布について、理想化されたモデルとして、周面固定の場合を選び、材質も等方弾性体と仮定したうえで、3次元解析による1つの基本的データを示した。¹⁾ もちろんコンクリート構造のような複合材においては、内蔵される鉄骨や、鉄筋の持つ不均質性、さらにコンクリートのひびわれなどの影響について、今後、より詳細な議論が必要となるであろう。ところで、この種の研究として有限要素法によるもの⁴⁾がみうけられるが、電算計算機の発達した現在でも、3次元解析になると、計算容量、および、局所的な応力の推移に関し、初期値接続問題としてのこの種の解析における精度上の点などから、なお問題点があるようであり、解析データも目下のところほとんど見当らない。さて、筆者はMindlin解の多面的応用によって、すでに不均質性、弾塑性性、ひびわれ現象等を高精度で解析しうる1つの数値解法^{2),3)}を提案してきた。本研究は、これらの解法を応用し、標記の構造物の力の流れ、および、ひびわれによって生ずる内部応力の再配合の様子を知り、耐荷力の検討を行なうものである。すなわち、構造物は内蔵される補剛材によって、部分的に強化され、補剛材は、とりまゝ母体とともに変形する。一方、母体は引張に対し、引張限界応力⁵⁾までは弾性的であるが、この引張限界応力に達するといびわれが発生し、応力の再配合がかわる。また、Druckerにより提案された塑性理論に従って、母体には、せん断すべりが生ずるものとして解析する。

2. 解法

解析上の仮定として、前論文^{2),3)}でも用いたように、不均質性、ひびわれ、および塑性に関する物理量は、分割された有限領域において平均値をもつものとし、また、それらは、有限小領域内に設けた選点において評価されるものとする。さて、母体と補剛材間のすべりはないものとし、補剛材のある有限領域の合成された弾性マトリックスを次のように与える。

$$[D] = [D_c] + [D_s] \text{ ----- (1)}$$

ここで $[D_c]$: 母体の弾性マトリックス

$$[D_s] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{: 補剛材の含有率による異方性の弾性マトリックス}$$

1) 島田, 岡村: "厚い長方形スラブの応力と変形" 土木学会論文報告集投稿中

2) 岡村, 島田: "弾塑性もしくは不均質弾性を有する3次元体の数値解法"

土木学会論文報告集 No.212, pp.11~24, 1973

3) 岡村, 島田: "ひびわれを有する不均質3次元体の数値解法"

第28回年次学術講演会報告集 I, pp.41~43, 1973

4) Schnobrich W.C., et al: "Finite element analysis of reinforced concrete" ASCE, Vol. 99, ST10, pp. 2109~2122, 1973

(a) 母体のひびわれ現象の解析

各選点における母体の応力に対し長方形の要素として与えられる主応力 $\{\sigma_i\}_e$ ($i=1,2,3$) を求め、その中の1つが、引張限界応力 σ_{te} に達したとすると、その方向の主応力に抵抗しえない、また、それに直交する面のせん断応力に対する抵抗が低下するよう材料は母体に変化する。すなわち主応力方向の座標系 $x'-y'-z'$ に対応する任意のひずみ $\{\epsilon\}'$ に対し、 $\{\sigma\}'_e = [D'_e]\{\epsilon\}'$ で表わされる弾性マトリックスの要素が上述の条件を満足するように変換される。これを、もとの座標系 $x-y-z$ にもとすと

$$\{\sigma\}'_e = [k]^{-1} [D_e] [L] \{\epsilon\}' = [D'_e] \{\epsilon\}' \text{ ----- (2)}$$

ただし、 $[k]$ $[L]$ は座標変換マトリックス

これは、ひびわれによって母体の1部が変化した、応力-ひずみ関係式である。
したがって補剛材のある有限領域での合成された弾性マトリックスは

$$[D'_{cr}] = [D'_e] + [D_s] \text{ ----- (3)}$$

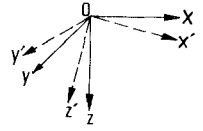


図-1

となる。また、このひびわれが閉じれば、母体はもとの材料に回復するものとする。

(b) 母体のせん断すべりの解析

材料の仮定として、母体は、弾完全塑性体とし、塑性域での応力-ひずみ関係は flow rule にしたがうものとする。さて、全ひずみ速度 $\{\dot{\epsilon}\}'$ は、弾性、および塑性ひずみ速度成分 $\{\dot{\epsilon}_e\}'$, $\{\dot{\epsilon}_p\}'$ からなり、

$$\{\dot{\epsilon}\}' = \{\dot{\epsilon}_e\}' + \{\dot{\epsilon}_p\}' = [D_e] \{\dot{\epsilon}\}' + \{\dot{\epsilon}_p\}' \text{ ----- (4)}$$

いま、降伏条件を塑性ポテンシャル f とすれば、塑性ひずみ速度 $\{\dot{\epsilon}_p\}'$ は、

$$\{\dot{\epsilon}_p\}' = \mu \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}'_e} \text{ ----- (5)}$$

ただし μ : 塑性変形中変化するスカラー量

$$\text{したがって、} \{\dot{\sigma}_e\}' = [D_e] \{\dot{\epsilon}\}' - [D_e] \{\dot{\epsilon}_p\}' = [D_e] \{\dot{\epsilon}\}' - [D_e] \mu \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}'_e} \text{ --- (6)}$$

式(6)を0からたまたで時間積分をおこなう、また $\int_0^t [D_e] \mu \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}'_e} dt$ の項を荷重段階 j の和置換し、さらに補剛材のある領域では、補剛材の応力-ひずみ関係を合成すると

$$\{\sigma\}' = [D] \{\epsilon\}' - \sum_j \left\{ [D_e] \mu \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}'_e} \right\}_j \text{ ----- (7)}$$

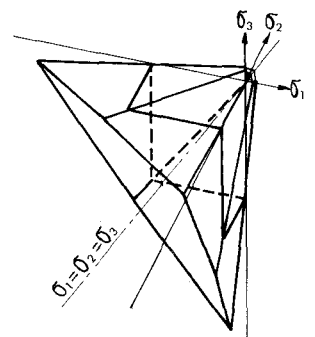


図-2 降伏曲面

さて、本文では、降伏条件として、Drucker の式を用いた。すなわち

$$f = |\tau| + \eta \sigma - \sigma_0 = 0 \text{ ----- (8)}$$

式中 η , σ_0 は材料定数であり、それぞれ、内部摩擦係数、母体のせん断強度である。ここで最大、最小主応力 σ_1, σ_3 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) を用いて書き改めると

$$f = (\eta^2 + 1) \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\eta}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_0 = 0 \text{ ----- (9)}$$

さて、式(7)に含まれる弾性マトリックスは、ひびわれによる弾性マトリックスの変換も考慮されたものであり、以下の解式では、それらの影響も同時に含まれる。さて、一般に3次元問題において、解の与えられている基本的Caseは、等方弾性体の場合である。そこで基本となる等方性の弾性マトリックスを $[D_0]$ とすると、

両者の偏差は、ひびわれの状態、補剛材によって、各有限領域で異なるが、それを一般に $[\Delta D]$ とすると、式(8)は次のようになる。

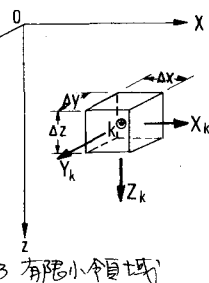
$$\{f\} = [D_0]\{e\} + [\Delta D]\{e\} - \sum_j [D_c] \mu \frac{\partial f}{\partial c_j} \quad (10)$$

したがって、釣合式に代入することにより、本問題の三次元体の挙動を支配する次の基礎式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 u &= \frac{\partial T_x^*}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}^*}{\partial z} (= -X) \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 v &= \frac{\partial T_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial T_y^*}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}^*}{\partial z} (= -Y) \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w}{\partial z^2} \right) + G_0 \nabla^2 w &= \frac{\partial T_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial T_z^*}{\partial z} (= -Z) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\text{また } \{f\}^* = [\Delta D]\{e\} - \sum_j [D_c] \mu \frac{\partial f}{\partial c_j} \quad (12)$$

式(11)の右辺の項は、式(12)からわかるように補剛材、母体のひびわれ、および母体の塑性変形に從属する項で、釣合式の性質から Body Force と同じ性格をもつ。ところで、まえがきにもふれたように、選点をなかに有限小領域では、これらの物理量は均一な分布をもつものとみなせば、前論文にも示したように、部分的差分法により、補剛材による強化、および母体のひびわれにより剛性の变化する領域では $\{e\}$ 、また母体の塑性化した領域では、 μ に属する1次式として与えられる。したがって、荷重段階の各時点で、 $\{e\}$ 、および μ は、各選点におけるひずみの条件、および降伏条件により形成される連立方程式の解として定まり、分割された各小領域で評価されたばならない X_k, Y_k, Z_k が求まり、これらを Body Force として作用させることにより(選点のひずみ、および変位)が得られる。さらに外荷重によるひずみおよび変位、ならびに前論文でも示した、境界調整法により求めたそれらを重ね合わせることにより、荷重段階の各時点でのひずみ、変位、さらに応力が求まる。



3. 逐次計算の方法

まず、各有限小領域で補剛効果による剛性変化を考慮した三次元弾塑性問題としての解法を境界調整とともにこない、各選点における母体のひびわれ、および降伏条件を照査し、弾性限界荷重での応力、ひずみ、変位を求め、以下、次のような逐次計算をおこなう。

1) 荷重段階(j-1)における諸量は確定したものとし、荷重増分をおこない、(j)段階へ移る。まず、母体の応力 $\{f\}_{j-1} + \Delta f_j$ の最大主応力が、母体の引張限界応力を越えているかどうかを判定し、超えていなければ(2)の過程へ移る。越えている場合は、引張限界になるように荷重増分を調整し、ひびわれ発生による弾性マトリックスの変換をおこない、このひびわれ発生による応力配分の影響で、各点の応力、ひずみ、および変位に計算される。同時に、各選点において、新しいひびわれの発生、ならびに回復、および、2)に述べる塑性化の検討をおこない、新しいひびわれの発生に対しては上述の過程が繰返される。ひびわれの回復がみられる場合は、その点の弾性マトリックスをもとの状態に変換し、次の過程へ進む。塑性化については2)の操作をおこなう。

2) 1)で計算された、各選点の母体の応力 $\{f\}_j$ に対して、母体の降伏条件の判定をおこなう。すべての選点で $f \leq 0$ の場合は、1)の過程へ移行し、次の荷重段階へと進む。 $f > 0$ の場合、塑性条件に從って、各点の応力、ひずみ、および変位にその影響が計算され、その点の応力が収束するまで2)の過程が繰返され、また1)の後半で述べた新しいひびわれの発生、ひびわれの回復、塑性化を検討する。当然のことながら1)、2)の過程において、境界調整も同時におこなわれる。

4. 計算例

表面に分布荷重を受ける周面固定の厚い長方形スラフについて、前論文の弾性計算をもとに既述をおこない、計算をおこなった。結果については、目下整理中であり、講演時にデータを主体に説明する。