I-72

共役射影理論を応用した板の差分式

東北大学工学部　正員　佐武正雄
東北大学工学部　正員　○新関　茂

1．まえがき

近年，離散化手法を統一的に考察しようとする傾向に対応し，差分法と有限要素法の関係が論じられている．Griffin 等[1]は，微分方程式を直接差分化せず，ポテンシャルエネルギーを汎関数にえらび，変分問題の差分法による解法を応用し，不規則な mesh 上の差分方程式を誘導している．この方法は，有限要素法と差分法の混合的方法と考えられ，Zienkiewiz[2] 及び坂井[3]は，この方法を用い，有限要素法と差分法の関係を論じている．一方，著者等[4]は，Oden によって提案された共役射影理論[5,6]を用い，梁の境界条件を厳密に取り扱い得る差分方程式を導びき，上記の著者等とは，異なった立場から有限要素法と差分法の関係を議論した．

本文では，同様に共役射影理論を用い，境界条件を考慮した板の差分方程式の誘導について説明する．

2．共役射影理論による板の差分式の誘導

板の差分式を共役射影理論によって誘導する方法を説明する．等方性板の微分方程式は，曲げ剛性をDとして式(2.1)によって与えられる．$\mathcal{L}$は，Hilbert空間Hの関数wをそれと共役なHilbert空間H^*の関数p/Dに写像する線形作用素である．共役射影理論によれば，Hの作用素$\mathcal{L}$の離散化は，その部分空間で$\mathcal{L}$を近似的に表現することと考えられる．初めに，板の内点(0,0)における差分式の誘導について説明する．$\mathcal{L}w$を図-1の点(0,0)で考察するものとすれば，式(2.3)が成立する．ここに，$\delta(x)$，$\delta(y)$はDiracのデルタ関数であり，$\langle f, g\rangle$は，2つの関数fとgの内積を表わすものとする．式(2.1)のx，y方向の2次及び4次の偏微分係数は，それぞれLagrangeの2次の補間関数(2.4)と4次の補間関数(2.5)によって近似されるものとする．ここに，x，y方向の分割長をhとして，$\xi=x/h$，$\eta=y/h$である．式(2.4)と(2.5)の補間関数は，それぞれ領域$-1\leq\xi\leq1$および$-2\leq\eta\leq2$以外では恒等的に0の値をとるものとする．$\psi_\alpha(x)$を基底とする空間をΨ_1，$\psi_\alpha(y)$を基底とする空間をΨ_2とすれば，直積空間$\Psi=\Psi_1\times\Psi_2$はHの部分空間となっている．Ψ_1のGram行列は式(2.6)によって定義され，Ψ_1と共役な空間Ψ_1^*の基底$\psi^\alpha(x)$は式(2.7)によって導びかれる(式(2.7)のβについては和をとるものとする)．この場合 式(2.7)によりΨ_1とΨ_1^*は同一の空間となる．HからΨへの射影作用素をΠとすれば，関数wは式(2.10)により，近似的に表現される．$w\in\Psi$ならば$w^{\alpha\beta}=w(\alpha h,\beta h)$である．$H^*$から$\Psi_1^*$への射影作素を$\Pi_1^*$とすれば$\Pi_1^*\delta(x)=\psi^0(x)$等が成立するから，式(2.3)の第1項$\langle\partial^4 w/\partial x^4, \delta(x)\delta(y)\rangle$，及び第3項$\langle\partial^4 w/\partial y^4, \delta(x)\delta(y)\rangle$を部分空間$\Psi$で考察すれば，

$$\mathcal{L}w(x,y)=\frac{1}{D}p(x,y) \qquad (2.1)$$

ここに

$$\mathcal{L}=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^4}{\partial y^4} \qquad (2.2)$$

$$\mathcal{L}w(x,y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\langle\mathcal{L}w(x,y), \delta(x)\delta(y)\rangle \qquad (2.3)$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{-1}(\xi)&=\tfrac{1}{2}\xi(\xi-1)\\ \varphi_0(\xi)&=(\xi+1)(\xi-1)\\ \varphi_1(\xi)&=\tfrac{1}{2}(\xi+1)\xi\end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_{-2}(\xi)&=\tfrac{1}{24}(\xi+1)\xi(\xi-1)(\xi-2)\\ \psi_{-1}(\xi)&=-\tfrac{1}{6}(\xi+2)\xi(\xi-1)(\xi-2)\\ \psi_0(\xi)&=\tfrac{1}{4}(\xi+2)(\xi+1)(\xi-1)(\xi-2)\\ \psi_1(\xi)&=-\tfrac{1}{6}(\xi+2)(\xi+1)\xi(\xi-2)\\ \psi_2(\xi)&=\tfrac{1}{24}(\xi+2)(\xi+1)\xi(\xi-1)\end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

$$C_{\alpha\beta}=\int_{-2h}^{2h}\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x)\,dx \qquad (2.6)$$

$$\psi^\alpha(x)=C^{\alpha\beta}\psi_\beta(x) \qquad (2.7)$$

ここに

$$C^{\alpha\beta}=(C_{\alpha\beta})^{-1} \qquad (2.8)$$

$$\int_{-2h}^{2h}\psi_\alpha(x)\psi^\beta(x)\,dx=\delta_\alpha{}^\beta \qquad (2.9)$$

$$\overline{w}(x,y)=\Pi w(x,y)=w^{\alpha\beta}\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y) \qquad (2.10)$$

ここに

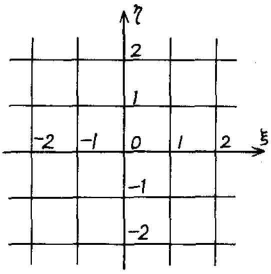
$$w^{\alpha\beta}=\langle w(x,y), \psi^\alpha(x)\psi^\beta(y)\rangle \qquad (2.11)$$

$$\langle w^{\alpha\beta}\psi_\beta(y)\frac{\partial^4\psi_\alpha(x)}{\partial x^4},\ \psi^\circ(x)\psi^\circ(y)\rangle = w^{-20}-4w^{-10}+6w^{00}-4w^{10}+w^{20} \tag{2.12}$$

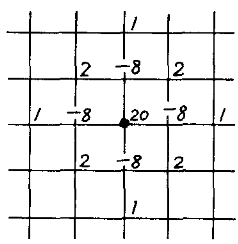
$$\langle w^{\alpha\beta}\psi_\alpha(x)\frac{\partial^4\psi_\beta(y)}{\partial y^4},\ \psi^\circ(x)\psi^\circ(y)\rangle = w^{0-2}-4w^{0-1}+6w^{00}-4w^{01}+w^{02} \tag{2.13}$$

$$2\langle w^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi_\alpha(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_\beta(y)}{\partial y^2},\ \varphi^\circ(x)\varphi^\circ(y)\rangle = 2\{w^{-11}+w^{11}+w^{-1-1}+w^{1-1}-2(w^{01}+w^{-10}+w^{10}+w^{0-1})+4w^{00}\} \tag{2.14}$$

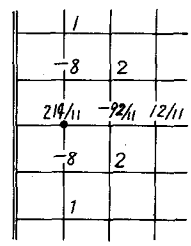
式(2.12)及び(2.13)が得られる。また，式(2.3)のオ2項に関しては，補間関数(2.4)を用い同様な考察を行うことによって式(2.14)が求められる。したがって，$\mathcal{L}w$ の点(0,0)における差分表示は，図-2となる。これは，通常の差分法による $\mathcal{L}w$ の離散化と一致したものとなっている。更に，Hermiteの補間関数を用いることにより，仮想点を考慮せずに境界条件を導入した差分式を導びくことができる。図-3，4は，単純支持辺及び固定辺の場合の差分式を図示したものである。板の角の部分における差分式も同様に導びくことが可能であるが紙面の都合で省略する。



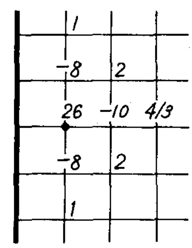
図−1



図−2



図−3



図−4

3. 考察

本文では，一般内点における差分式が，通常の差分法によって導びかれた差分式と一致するように補間関数を選び，またそれに対応させて，境界条件を考慮した差分式の補間関数も選んでいるが，共役射影理論により境界条件を導入した差分式は，通常の仮想点を考慮した差分式[7]と比較し，ウェイトが幾分大きな値となっている。

4. あとがき

適当な補間関数を選び共役射影理論を用いることによって，通常の差分法によって導びいたものと一致する一般内点での差分式，および仮想点を考慮せずに単純支持と固定の境界条件を考慮した差分式を容易に導びくことが可能であることを示した。一般内点での差分式に対して，ここでは2組の補間関数を用いたが，式(2.5)だけを用い式(2.1)の全ての偏微分係数を近似することも可能である。この場合には図−1の全ての分割点でウェイトをもつ差分式となる。境界における差分式についても同様である。また，更に高次の補間関数の使用により，Zurmühl[8]による高精度差分式の誘導も可能と思われる。

参考文献

1) Griffin,D.S.and Kellog,P.B. : A Numerical Solution for Axially Symmetrical and Plane Elasticity Problem, Int.J.Solids and Structures, 3(1967),781-794.
2) Zienkiewicz,O.C. : The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Application(ed. by J.Whiteman),Academic Press(1973),1-35.
3) 坂井藤一：有限要素法と差分法の等価性およびある離散化手法，土木学会論文報告集,No.220(1973)，39－52.
4) Satake,M.and Niiseki,S. : An Application of the Theory of Conjugate Projections to the Formulation of Finite Difference Method,Tech.Rep.Tohoku Univ.35,No.1(1974),93-100.
5) Oden,J.T. : Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics(ed. by J.T.Oden and E.R.A.Oliveria), UAH Press(1973),41-75.
6) Oden,J.T. : Finite Elements of Nonlinear Continua,MacGraw-Hill(1972),54-92.
7) 成岡，丹羽，山田，白石：構造力学，オIII巻，丸善(1970)，141-157.
8) Zurmühl,R. : Behandlung der Plattenaufgabe nach dem Verbesserten Differenzenverfahren, Z.angew.Math.Mech.,37(1957),1-16.