I-65 精密有限要素法による板の曲げ

信州大学 正員 谷本勉之助
正員 夏目正太郎
○学生員 清水博

1、序文

本解析は $\nabla^4 w = \frac{q}{D}$ に支配される、平板の曲げたわみの、有限要素法について、漸化変形法を適用したもので、特に精密有限要素法と置いたのは、たわみ形状関数に、さらに任意数の高次項を取り込み、それらの係数を、ひずみエネルギー最小の方法で決定しようとした試みのためである。分割要素は便宜、矩形とした。荷重は、基礎方程式の分布荷重 q を取り込んで、要素に一様に q が分布する荷重としてある。また、力釣合は、各節点に集まっている要素の頂点の力量を集計したものである。その結果、剛性マトリックスは三軸マトリックスとなる。

2、解析

四辺形の要素は、頂点の自由度の合計が、変形量に関して、12自由度になるので、曲げたわみ w は、部材座標系の座標、x, y に関する多項式として、12項必要であり、12個の未定定数からなるたわみ形状関数を有する。従って必要なだけ、高次の項を取り込み、$\nabla^4 w = \frac{q}{D}$ の式及びひずみエネルギー最小の方法を用いて、多項式の自由度を減少し、最終的な、たわみ形状関数を決定する。ここで、

$$w = \lfloor 1 \;\; x \;\; y \;\; x^2 \;\; xy \;\; y^2 \;\; x^3 \;\; x^2y \;\; xy^2 \;\; y^3 \;\; x^3y \;\; xy^3 \rfloor \mathbb{X}$$
$$+ \lfloor x^4 \;\; x^2y^2 \;\; y^4 \;\; x^5 \;\; x^4y \;\; x^3y^2 \;\; x^2y^3 \;\; xy^4 \;\; y^5 \rfloor \mathbb{Y}'$$

$\nabla^4 w = \frac{q}{D}$ の式を用いて、

$$w = \lfloor 1 \;\; x \;\; y \;\; x^2 \;\; xy \;\; y^2 \;\; x^3 \;\; x^2y \;\; xy^2 \;\; y^3 \;\; x^3y \;\; xy^3 \rfloor \mathbb{X}$$
$$+ \lfloor x^4 - 3x^2y^2 ,\; -3x^2y^2 + y^4 ,\; x^5 - 5x^3y^2 ,\; x^4y - x^2y^3 ,$$
$$-x^3y^2 + xy^4 ,\; -5x^2y^3 + y^5 \rfloor \mathbb{Y} + \frac{q}{8D}x^2y^2$$

以上のことから 部材座標系の状態ベクトルとして、一般変形量と、一般力量が次のようにとられる。

$$\mathbb{U}\{w,\ \theta_x,\ \theta_y\} = \mathbb{P}_0(x,y)\mathbb{X} + \mathbb{P}_1(x,y)\mathbb{Y} + \mathbb{A}_0(x,y)q$$
$$\mathbb{V}\{M_x,\ M_y,\ M_{xy},\ Q_x,\ Q_y\} = \mathbb{Q}_0(x,y)\mathbb{X} + \mathbb{Q}_1(x,y)\mathbb{Y} + \mathbb{B}_0(x,y)q$$

ここで $\mathbb{P}_0(x,y)$ は(3×12)、$\mathbb{Q}_0(x,y)$ は(5×12)の一般形状関数によるマトリックスであり、$\mathbb{X}$ は12個の未定定数からなる固有マトリックスである。$\mathbb{P}_1(x,y)$ は $\mathbb{P}_0(x,y)$ に、$\mathbb{Q}_1(x,y)$ は $\mathbb{Q}_0(x,y)$ に、それぞれ、ひずみエネルギー最小の方法によって取り込まれる補正マトリックスであり、$\mathbb{Y}$ はその未定定数からなるマトリックスである。また、$\mathbb{A}_0(x,y)$ は(1×3)、$\mathbb{B}_0(x,y)$ は(1×5)の荷重項マトリックスである。次にひずみエネルギー最小の方法を用いる。

$$\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \left\lfloor \frac{\partial}{\partial c_i}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ,\; \frac{\partial}{\partial c_i}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ,\; \frac{\partial}{\partial c_i}2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\rfloor \mathbb{S}\,\mathbb{V}\,dx\,dy = 0$$

ここで、$2a$、$2b$は矩形要素の幅を表わし、C_iは$\mathbb{Y}$に相当する未定定数であり、$\mathbb{S}$は（3×5）の調整マトリックスである。この結果、一般変形量と一般力量が次のように得られる。

$$\mathbb{U}\{w,\ \theta_x,\ \theta_y\}=\mathbb{P}(x,y)\mathbb{X}+\mathbb{A}(x,y)q$$

$$\mathbb{V}\{M_x,M_y,M_{xy},Q_x,Q_y\}=\mathbb{Q}(x,y)\mathbb{X}+\mathbb{B}(x,y)q$$

よって、固有マトリックスを消去して、力量と変形量の関係を求めることができる。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{V}^1\\\mathbb{V}^2\\\mathbb{V}^3\\\mathbb{V}^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{Q}^1\\\mathbb{Q}^2\\\mathbb{Q}^3\\\mathbb{Q}^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{P}^1\\\mathbb{P}^2\\\mathbb{P}^3\\\mathbb{P}^4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbb{U}^1\\\mathbb{U}^2\\\mathbb{U}^3\\\mathbb{U}^4\end{bmatrix}+\left[-\begin{bmatrix}\mathbb{Q}^1\\\mathbb{Q}^2\\\mathbb{Q}^3\\\mathbb{Q}^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{P}^1\\\mathbb{P}^2\\\mathbb{P}^3\\\mathbb{P}^4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbb{A}^1\\\mathbb{A}^2\\\mathbb{A}^3\\\mathbb{A}^4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{B}^1\\\mathbb{B}^2\\\mathbb{B}^3\\\mathbb{B}^4\end{bmatrix}\right]q$$

ここに、漸化変形法で最も重要な基本方程式が得られたが、この式をもとに、各節点での力釣合を考えて、変形量のみを未知量とする連立方程式を導き出す。ここで、上式は部材座標系での方程式であるから、力釣合を考えるためには、絶対座標系への射影が必要となる。そのために、部材座標系を絶対座標系に射影する射影子を$\mathbb{R}^i$、また、その射影から得られた絶対座標系の力量を$\mathbb{W}^i$とすると、基本方程式は、次のようになる。

$$\mathbb{W}^i=\mathbb{R}^i\mathbb{V}^i$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^1&\mu^1&\nu^1&0^1\\\lambda^2&\mu^2&\nu^2&0^2\\\lambda^3&\mu^3&\nu^3&0^3\\\lambda^4&\mu^4&\nu^4&0^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}^1\\\mathbb{U}^2\\\mathbb{U}^3\\\mathbb{U}^4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\rho^1\\\rho^2\\\rho^3\\\rho^4\end{bmatrix}q$$

従ってある節点での力釣合を取ると、

$$\Sigma\mathbb{W}^i+\mathbb{P}=0$$

これらを最終的に集約すると、完全変位三軸マトリックスが得られる。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{B}_1&\mathbb{C}_1&&&\\\mathbb{A}_2&\mathbb{B}_2&\mathbb{C}_2&&\\&\mathbb{A}_3&\mathbb{B}_3&\mathbb{C}_3&\\&&\cdots&\cdots&\cdots\\&&&\mathbb{A}_n&\mathbb{B}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{\mathbb{U}\}_1\\\{\mathbb{U}\}_2\\\{\mathbb{U}\}_3\\\cdots\\\{\mathbb{U}\}_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\{\mathbb{K}\}_1\\\{\mathbb{K}\}_2\\\{\mathbb{K}\}_3\\\cdots\\\{\mathbb{K}\}_n\end{bmatrix}=0$$

3、あとがき

有限要素法の第一の障害は、電子計算機の大きな容量を要求する点であるが、今回の試みは高次の形状関数を取ることにより、要素分割を少なくし、容量を小さく押えようというものである。

参考文献：　栖原二郎　「平板の曲げ理論」