I-64　　周波数伝達関数を用いた有限要素法による振動粘弾性問題の解法

運輸省港湾技術研究所　正員 岩崎峯夫

1．まえがき

本手法は，高速フーリェ変換（F.F.T.）の出現により，多入出力の調和解析が時間的に可能になったので，これを，有限要素法に応用したものである。変換，逆変換速度は，数千データで，数秒程度である。[7,3]

2．伝達関数，周波数伝達関数とフーリェ変換

伝達関数は，入力$y(t)$と出力$x(t)$のラプラス変換の比で表わされる。ここで，$y(t)$，$x(t)$は，$t\geq 0$で定義される時間関数である。例えば，1入力，1出力である地震応答計算での一質点系の運動方程式では，次のようになる。[3]

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=-M\ddot{y} \tag{1}$$

ラプラス変換すると次式となる。

$$(Ms^2+Cs+K)X(s)=-Ms^2Y(s) \tag{2}$$

伝達関数$Q(s)$は，次式となる。

$$Q(s)=X(s)/Y(s)=-Ms^2/(Ms^2+Cs+K) \tag{3}$$

sは，複素数であり，その一つの値である$j\omega$（ j は，虚数単位）を代入すると次式を得る。

$$X(j\omega)=Q(j\omega)Y(j\omega) \tag{4}$$

ラプラス変換は，次式で示される。

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{5}$$

フーリェ変換は，次式で示される。

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{6}$$

$t<0$で，$f(t)=0$，$s=j\omega$ とした場合は，両式は，一致する。すなわち，$X(j\omega)$，$Y(j\omega)$は，$X(t)$，$Y(t)$ の（複素）フーリェ変換により得られた周波数スペクトルを表わしている。フーリェ逆変換は，(7)式で示される。(7) 式の

$$f(t)=1/2\pi\int_{-\infty}^\infty F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{7}$$

$$F(j\omega)e^{j\omega t}=Ae^{j(\omega t+\varphi)} \tag{8}$$

$F(j\omega)e^{j\omega t}$ は，角周波数ωの正弦状波の複素数表現であり，(8)式に示される。ただし，$A=\sqrt{Re(\omega)^2+Im(\omega)^2}$，$\varphi=\tan^{-1}(Im(\omega)/Re(\omega))$であり，Aは，振幅を，$\varphi$は，位相ずれを示す。$X(j\omega)$,$Y(j\omega)$ も同様である。(4) 式からわかるように，$Y(j\omega)$は，$Q(j\omega)$を乗ぜられると，振幅，位相ずれに変化を受ける。ただし，周波数は，変化しない。$Q(j\omega)$は，周波数伝達関数と呼ばれ[1]，一種のフイルタでもある。結局，$x(t)$を求めるには，$y(t)$をフリエ変換し，$Y(j\omega)$を求め，$Q(j\omega)$を乗じ,$X(j\omega)$を求め逆変換すればよい。すなわち，次式によればよい。

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty Q(j\omega)Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{9}$$

フーリェ変換の数値計算は，有限フーリェ変換により行なうので，次の条件を満足する区間の上限Tが存在しなければならない。

$$x(t)=0\quad y(t)=0\qquad (0>t\ ,\ t>T) \tag{10}$$

地震波と，その応答のように，ある時間内に零に収束する場合は，問題は，ないが，ステップ入力の場合は，図－1に示すように，出力が収束する時間の2倍取る必要がある。また，(9)式の計算において$\frac{1}{2}(Q(j\omega)Y(j\omega)e^{j\omega t}+Q(-j\omega)Y(-j\omega)e^{-j\omega t})$が表われ，虚数部が消去され，正弦状波の実数表現$A\cos(\omega t+\varphi)$になっていて，両者は互いに，共役複素数であるので，一方計算するだけで十分である。また，$X(j\omega)e^{j\omega t}$は，入力$Y(j\omega)e^{j\omega t}$の定常応答である。

3．有限要素法での周波数伝達関数

有限要素法では，多入力，多出力間の伝達関数を求めるので，マトリックスで表わされる。例えば，図－1に示す，応力－ひずみ関係の場合は，次のようにして求められる。節点 i,k 間のせん断粘弾性係数$G(s)$を求めるには，中間節点 j を消去しても得られるが，節点 j k 間では，G_2とCs は，並列であるので，G_2+Cs となる。また，G_1とG_2+Csは，直列であるので次式となる。

$$1/G(s)=1/(G_2+Cs)+1/G_1 \tag{11}$$

sに $j\omega$ を代入すれば，$G(j\omega)$ が求められる。要素のひずみ－応力周波数伝達関数 $D_e(j\omega)$ は，いわゆる応力マトリックスに，$G(j\omega)$，K（複素弾性係数）を代入することにより得られる。要素の変位－力の周波数伝達関数は，次のようになる。

$$[k_e(j\omega)]=[B_e]^T[D_e(j\omega)][B_e]t\Delta \tag{12}$$

構造全体の周波数伝達関数は，重ね合せることにより求められ，粘弾性体の周波数伝達関数が求められる。さらに振動問題では，質量マトリックス$(j\omega)^2M$を加えることにより，振動粘弾性体の周波数伝達関数が各ωについて求められ，次のようになる[2]。

$$[K(j\omega)]\{\delta(j\omega)\}=\{P(j\omega)\} \tag{13}$$

$\{\delta(j\omega)\}$，$\{P(j\omega)\}$は，それぞれ，各節点の変位，力のスペクトルであり複素数で示される。この連立一次方程式を，各ωについて解くことにより未知の変位，力のスペクトルが求められる。各要素の応力，ひずみスペクトルは，次式により求められる。

$$\{\sigma_e(j\omega)\}=[D_e(j\omega)][B_e(j\omega)]\{\delta_e(j\omega)\},\quad \{\varepsilon_e(j\omega)\}=[B_e(j\omega)]\{\delta_e(j\omega)\} \tag{14}$$

よって，各未知量のスペクトルが求められるので，フーリェ逆変換することにより，未知量の時間関数が求められる。(13)式の連立方程式を解く場合，一般には，実数部と虚数部に分けて解かれるが，各値を複素数定義することにより，実数演算プログラムがそのまま利用でき，係数記憶が少なくてすみ，対称性も利用できる。構造物の応答計算を入力を変えて，行ないたい場合がある。この場合，既知節点変位，力が互いに伝達関数（定数を含む）で，関係ずけられるなら，2回目から計算は，簡単になる。例えば，既知節点変位と力のラプラス変換を$\delta_i(s)\ (i=1,\cdots k)$，$P_l(s)\ (l=k+1,\cdots n)$とする，このうちの一つを基準入力と考える。例えば，$P_j(s)$をとったとすると，次の関係がある。

$$\delta_i(s)=Q_i(s)P_j(s)\ \ (i=1,\cdots k)\ ,\quad P_l(s)=Q_l(s)P_j(s)\ \ (l=k+1\cdots n) \tag{15}$$

ここで，$s=j\omega$とし，$P_j(j\omega)=1$とすると次式となる。

$$\delta_i(j\omega)=Q_i(j\omega)\ \ (i=1\cdots k)\ ,\quad P_l(j\omega)=Q_l(j\omega)\ \ (l=k+1\cdots n) \tag{16}$$

このようにして，未知スペクトルを求め，これを基準スペクトルとすると，各未知量のスペクトルは，基準スペクトルに基準入力スペクトルを乗ずればよい。よって，異なる基準入力が何ケースもある場合，一度構造物の周波数伝達関数を求めるだけでよい。節点lの力または，変位が，節点jよりA倍で，時間L遅く入力する場合次の伝達関数となる[1]。Lが固定であるとA=0である。

$$Q(s)=Ae^{-Ls} \tag{17}$$

また入力として，加速度を取る場合，次のように変換すればよい。$\delta_i(s)=(1/s^2)\cdot A_i(s)$　ここで，$A_i(s)$は，節点iの加速度，$1/s^2$は，2回積分の伝達関数であり，$\delta_i(j\omega)=(1/(j\omega)^2)A_i(j\omega)$として計算される。一般には，低周波ノイズをカットするため，ある周波数以下をカットするフィルタか，次のフィルタを用いるとよい[6]。

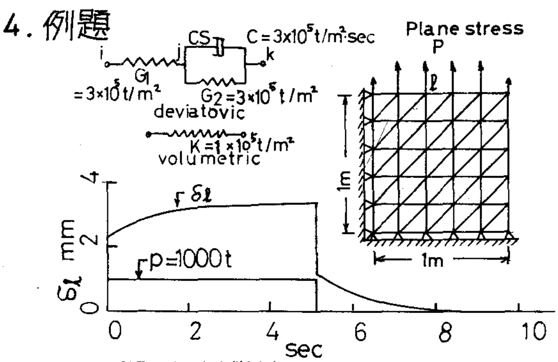
$F(j\omega)=0\ (\omega<\omega_c)$，$F(j\omega)=1\ (\omega>\omega_c)$ または，$F(j\omega)=(1-\lambda/((j\omega)^4+\lambda))$　結局$\delta_i(j\omega)=F(j\omega)/(j\omega)^2\cdot A_i(j\omega)$となる。

また，上式を構造全体の周波数伝達関数に含め，加速度－力の関係として解くこともできる。

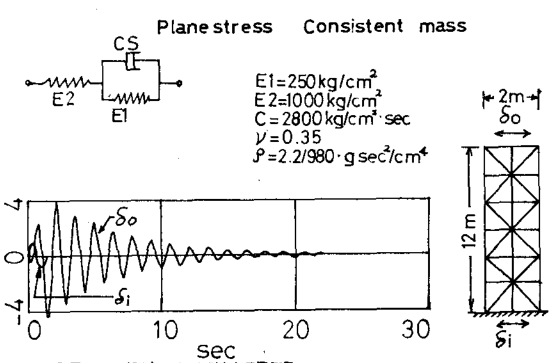
$$[1/(j\omega)^2\cdot K(j\omega)]\{A(j\omega)\}=\{P(j\omega)\}\quad \text{or}\quad [F(j\omega)/(j\omega)^2\cdot K(j\omega)]\{A(j\omega)\}=\{P(j\omega)\} \tag{19}$$

(13)式より得られた，節点変位スペクトルを，速度，加速度スペクトルに変換するには，$j\omega$，$(j\omega)^2$を乗ずればよく，節点の速度，加速度の時間関数も容易に得られる。

4．例題



図－1 粘弾性問題



図－2 振動粘弾性問題

参考文献 1)増渕正美：自動制御基礎理論，コロナ社 2)山田嘉昭：塑性・粘弾性，コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-2-A
3)伊藤哲次，山原浩：フーリエ級数展開による構造物の地震応答解析法，日本建築学会論文報告集，NO.190，1971-12
4)堀井健一郎，川原睦人：有限要素法による粘弾性体の解析法，土木学会論文報告集，NO.179，1970-7
5)渡辺啓行：有限要素法による粘弾性体の振動解析，土木学会論文報告集，NO.198，1972-2
6)吉田裕，岡山和生：地震加速度記録の積分における濾波計算のアルゴリズム，土木学会論文報告集，NO.221，1974-1
7)桑島進，永井康平：任意個数試料のFFT算法とそのスペクトル解析への応用，港湾技研資料，NO.155，1973-3