I-63　有限要素法による粘弾塑性体の解析

早稲田大学　正　堀井健一郎
中央大学　正　川原睦人
大成建設　正　○亀村勝美

1：まえがき

本論文では、P. Perzyna等により提案された熱力学理論に基づく、粘弾塑性体について、有限要素法による解析を行なった。粘弾塑性体というのは、平均応力に相当する値が物質に固有の降伏応力に達する迄は弾性体の挙動を示し、その後は塑性ひずみの速度が応力の関数として定義される挙動を示す物体である。

解式として得られる非線形連立方程式の解法としてテーラー展開を用いる摂動法が適用され、簡単なモデルについて数値計算を行なった。

2：平衡方程式

連続体中の任意点のグリーンのひずみは、次の様に表わされる。

$$2\varepsilon_{ij} = F_{mi}F_{mj} - \delta_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i}u_{m,j} \qquad (2-1)$$

ここで

$$F_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j} \qquad (2-2)$$

は、変形勾配と呼ばれるものである。又、静的な釣り合い方程式の局所形は次式で示される。

$$(F_{ij}\sigma_{jk})_{,k} + \rho_0 f_i = 0 \qquad (2-3)$$

ここで σ_{ij} は、キルヒホフの応力　テンソルであり（2－4）式で定義される。

$$P_i = F_{ij}\sigma_{jk}N_k = \sigma_{jk}(\delta_{ij} + u_{i,j})N_k \qquad (2-4)$$

又 f_i は、物体力，P_i は表面力，ρ_0 は密度，N_k は，物体表面に立てた単位法線ベクトルである。

平衡方程式を導びく為に仮想仕事の原理を用いる。（2－3）式両辺に仮想変位 u_i^* を掛け、体積 V_0 について積分を行ない，ガウスの発散定理を用いると次式が得られる。

$$\int_{V_0}(\sigma_{ij}\ \varepsilon_{ij}^*)dV_0 = \Omega \ , \quad \Omega = \int_{A_0}(P_i u_i^*)dA_0 + \int_{V_0}(\rho_0 f_i u_i^*)dV_0 \qquad (2-5)$$

ここで、ε_{ij}^* は次式で定義される仮想ひずみである。

$$2\varepsilon_{ij}^* = F_{mj}u_{m,i}^* + F_{mi}u_{m,j}^* = u_{i,j}^* + u_{j,i}^* + u_{m,i}u_{m,j}^* + u_{m,i}^*u_{m,j} \qquad (2-6)$$

3：構成方程式

粘弾塑性体の応力とひずみ速度との間の関係式は、P. Perzynaにより次式の様に与えられた。[1]

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \gamma\langle\Phi(F)\rangle\frac{S_{ij}}{J_2^{1/2}} \qquad (3-1)$$

ここで　$\dot{\varepsilon}_{ij}^P$ は塑性ひずみの速度，γ は物質に固有な係数，J_2 は偏差応力の2次の不変量，S_{ij} は、偏差応力で次式により定義される。

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} \qquad (3-2)$$

又、F は次式で表わされる静的降伏条件であり

$$F = \frac{J_2^{1/2}}{k} - 1 = \frac{\{S_{ij}S_{ij}/2\}^{1/2}}{k} - 1 \qquad (3-3)$$

$\langle\Phi(F)\rangle$ は次の様に定義される関数である。

$$\langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad F \leqq 0 \\ \Phi(\mathcal{F}) & ; \quad F > 0 \end{cases} \tag{3-4}$$

（3－3）式に於いて，たは，単純セン断に於ける降伏応力である．

全ひずみが弾性ひずみと塑性ひずみの和で与えられ塑性ひずみの体積成分 ε^p_{kk} がないと仮定すると，以下の様な速度型の構成方程式が導びかれる．

弾性体　（$F \leqq 0$）　$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl} \tag{3-5}$$

粘弾塑性体（$F > 0$）　$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}_{kl} - 2\mu\,\dot{\varepsilon}^p_{ij} \tag{3-6}$$

ここで　$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

であり λ，μ はラメの定数である．

4：摂動法

（2－5）式の Ω と変位 u_i が t（例えば時間）の関数であるとする．$t = t_0$ の時の各々の値と $\overset{(0)}{u}_i$，$\overset{(0)}{\Omega}$ とすると $t = t + dt$ での $\overline{u}_i$，$\overline{\Omega}$ は，テーラー展開を用いて次の様に表わせる。

$$\overline{u}_i = \overset{(0)}{u}_i + \overset{(1)}{u}_i dt + \frac{1}{2}\overset{(2)}{u}_i dt^2 + \frac{1}{6}\overset{(3)}{u}_i dt^3 + \cdots\cdots \tag{4-1}$$

$$\overline{\Omega} = \overset{(0)}{\Omega} + \overset{(1)}{\Omega} dt + \frac{1}{2}\overset{(2)}{\Omega} dt^2 + \frac{1}{6}\overset{(3)}{\Omega} dt^3 + \cdots\cdots \tag{4-2}$$

ここで $^{(n)}$ は、t に対する n 階微分を示す。（4－1）式を（2－1）式に代入すると次式が導びかれる．

$$\overline{\varepsilon}_{ij} = \overset{(0)}{\varepsilon}_{ij} + \overset{(1)}{\varepsilon}_{ij} dt + \frac{1}{2}\overset{(2)}{\varepsilon}_{ij} dt^2 + \frac{1}{6}\overset{(3)}{\varepsilon}_{ij} dt^3 + \cdots\cdots \tag{4-3}$$

ただし

$$2\overset{(0)}{\varepsilon}_{ij} = \overset{(0)}{u}_{i,j} + \overset{(0)}{u}_{j,i} + \overset{(0)}{u}_{m,i}\overset{(0)}{u}_{m,j} \tag{4-4}$$

$$2\overset{(1)}{\varepsilon}_{ij} = \overset{(1)}{u}_{i,j} + \overset{(1)}{u}_{j,i} + \overset{(1)}{u}_{m,i}\overset{(0)}{u}_{m,j} + \overset{(0)}{u}_{m,i}\overset{(1)}{u}_{m,j} \tag{4-5}$$

$$2\overset{(2)}{\varepsilon}_{ij} = \overset{(2)}{u}_{i,j} + \overset{(2)}{u}_{j,i} + \overset{(2)}{u}_{m,i}\overset{(0)}{u}_{m,j} + \overset{(0)}{u}_{m,i}\overset{(2)}{u}_{m,j} + 2\overset{(1)}{u}_{m,i}\overset{(1)}{u}_{m,j} \tag{4-6}$$

などである．又同様にして（2－6）式も次の様に書ける。

$$2\overset{(0)*}{\varepsilon}_{ij} = \overset{*}{u}_{i,j} + \overset{*}{u}_{j,i} + \overset{(0)}{u}_{m,i}\overset{*}{u}_{m,j} + \overset{*}{u}_{m,i}\overset{(0)}{u}_{m,j} \tag{4-7}$$

$$2\overset{(1)*}{\varepsilon}_{ij} = \overset{(1)}{u}_{m,i}\overset{*}{u}_{m,j} + \overset{*}{u}_{m,i}\overset{(1)}{u}_{m,j} \tag{4-8}$$

$$2\overset{(2)*}{\varepsilon}_{ij} = \overset{(2)}{u}_{m,i}\overset{*}{u}_{m,j} + \overset{*}{u}_{m,i}\overset{(2)}{u}_{m,j} \tag{4-9}$$

$$\vdots$$

（3－1）式が次の様に展開できるとする。

$$\overline{\overset{(1)p}{\varepsilon}}_{ij} = \overset{(1)p}{\varepsilon}_{ij} + \overset{(2)p}{\varepsilon}_{ij} dt + \frac{1}{2}\overset{(3)p}{\varepsilon}_{ij} dt^2 + \frac{1}{6}\overset{(4)p}{\varepsilon}_{ij} dt^3 + \cdots\cdots \tag{4-10}$$

ただし

$$\overset{(1)p}{\varepsilon}_{ij} = \gamma\langle\Phi(\mathcal{F})\rangle\frac{\overset{(0)}{S}_{ij}}{J_2^{1/2}} \tag{4-11}$$

$$\overset{(2)p}{\varepsilon}_{ij} = \gamma\langle\Phi(\mathcal{F})\rangle\frac{\overset{(1)}{S}_{ij}}{J_2^{1/2}} \tag{4-12}$$

などであり，　$$J_2^{1/2} = \overline{S}_{ij}\cdot\overline{S}_{ij}/2 \tag{4-13}$$

である．（4－3）（4－10）式を（3－6）式に代入すると

$$\overset{(1)}{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\overset{(1)}{\varepsilon}_{kl} - 2\mu\overset{(1)p}{\varepsilon}_{ij} \tag{4-14}$$

$$\overset{(2)}{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\overset{(2)}{\varepsilon}_{kl} - 2\mu\overset{(2)p}{\varepsilon}_{ij} \tag{4-15}$$

などと書け　$$\overline{\sigma}_{ij} = \overset{(0)}{\sigma}_{ij} + \overset{(1)}{\sigma}_{ij} dt + \frac{1}{2}\overset{(2)}{\sigma}_{ij} dt^2 + \frac{1}{6}\overset{(3)}{\sigma}_{ij} dt^3 + \cdots\cdots \tag{4-16}$$

なる式が導びかれる．

又、(2-5)式は(4-2),(4-10),(4-16)式を用いて次の様に書き直せる。

$$\int_{V_0} (\overset{(0)}{\sigma}_{ij} \overset{(0)}{\varepsilon}{}^*_{ij})\, dV_0 = \overset{(0)}{\Omega} \qquad (4-17)$$

$$\int_{V_0} (\overset{(0)}{\sigma}_{ij} \overset{(1)}{\varepsilon}{}^*_{ij} + \overset{(1)}{\sigma}_{ij} \overset{(0)}{\varepsilon}{}^*_{ij})\, dV_0 = \overset{(1)}{\Omega} \qquad (4-18)$$

$$\int_{V_0} (\overset{(0)}{\sigma}_{ij} \overset{(2)}{\varepsilon}{}^*_{ij} + \overset{(2)}{\sigma}_{ij} \overset{(0)}{\varepsilon}{}^*_{ij})\, dV_0 = \overset{(2)}{\Omega} - 2\int_{V_0} (\overset{(1)}{\sigma}_{ij} \overset{(1)}{\varepsilon}{}^*_{ij})\, dV_0 \qquad (4-19)$$

$$\vdots$$

これらの式に(4-14)(4-15)式で示される構成方程式を代入することにより、以下の様な線形の支配方程式を得ることができる。

$$\int_{V_0} (E_{ijkl} \overset{(1)}{\varepsilon}_{kl} \overset{(0)}{\varepsilon}{}^*_{ij} + \overset{(0)}{\sigma}_{ij} \overset{(1)}{\varepsilon}{}^*_{ij})\, dV_0 = \overset{(1)}{\Omega} + 2\mu \int_{V_0} (\overset{(1)}{\varepsilon}{}^p_{ij} \overset{(0)}{\varepsilon}{}^*_{ij})\, dV_0 \qquad (4-20)$$

$$\int_{V_0} (E_{ijkl} \overset{(2)}{\varepsilon}_{kl} \overset{(0)}{\varepsilon}{}^*_{ij} + \overset{(0)}{\sigma}_{ij} \overset{(2)}{\varepsilon}{}^*_{ij})\, dV_0 = \overset{(2)}{\Omega} + 2\int_{V_0} (\mu \overset{(2)}{\varepsilon}{}^p_{ij} \overset{(0)}{\varepsilon}{}^*_{ij} - \overset{(1)}{\sigma}_{ij} \overset{(1)}{\varepsilon}{}^*_{ij})\, dV_0 \qquad (4-21)$$

ここで、E_{ijkl}, γ, $\Phi(F)$は簡単の為dt間に変化しないとし(4-13)式の$J_2 = \overset{(0)}{S}_{ij} \overset{(0)}{S}_{ij}/2$と仮定する。

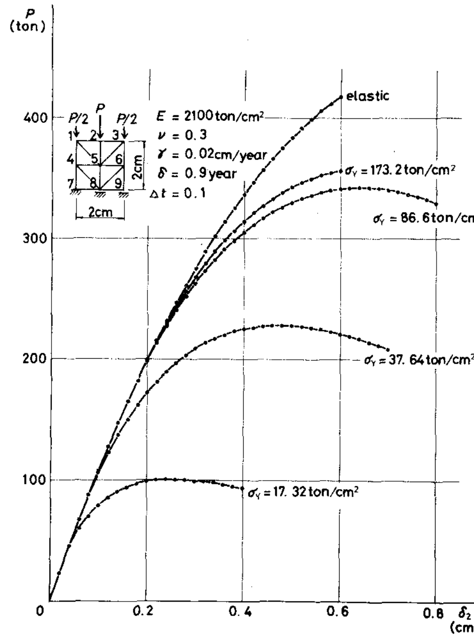

Fig-1 荷重-変位曲線

5：有限要素法の適用

連続体を有限の大きさを持つ要素に分割し、その要素のα節点のi方向変位を$U_{\alpha i}$と表わす。この時要素内の変位U_iは、形状関数Φ_αによって次式により近似される。又、仮想変位U_i^*についても同様の式が成り立つとする。

$$U_i = \Phi_\alpha U_{\alpha i}, \qquad U_i^* = \Phi_\alpha U_{\alpha i}^* \qquad (5-1,2)$$

(5-1)(5-2)式を(4-4)~(4-9)式に代入し、その結果を(4-20),(4-21)式に代入すれば有限要素法の支配方程式を求めることができる。[2] そして、$\overset{(0)}{U}_i, \overset{(0)}{\Omega}$, dt を既知とし、$\overset{(1)}{U}_i$又は$\overset{(1)}{\Omega}$を与えれば支配方程式を解くことにより$\overset{(1)}{\Omega}+\overset{(2)}{\Omega}$,…あるいは$\overset{(1)}{U}_i, \overset{(2)}{U}_i$…が求まり、次の段階の$U_i, \Omega$が(4-1)(4-2)式より計算される。これを繰り返すことにより非線形過程を追ってゆくことができる。

6：あとがき

(3-4)式の$\Phi(F)$としてF^δという形を仮定し、平面ひずみの条件で計算を行なった結果をFig-1,2に示す。Fig-1 はσ_Yの値を変えた時の荷重-変位曲線、Fig-2 は繰り返し強制変位を加えた時の時間応答曲線である。構成方程式については、今後このような物質を考慮した実験によりその形が決定される必要がある。

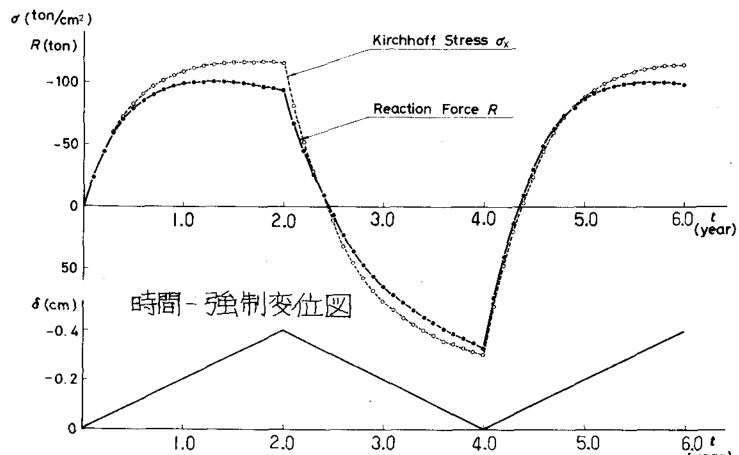

Fig-2 時間-応力,反力図

〔参考文献〕

[1] P. Perzyna : 「The constitutive equations for rate sensitive plastic materials」 Quart. Appl. Math. vol 20 (1963)

[2] M. Kawahara : 「Large strain visco-elastic numerical analysis by means of F.E.M.」 Proc. of JSCE No204 (1972)