I-59　　テンソル式より誘導したシェルの要素

法政大学　正員　大地羊三

1. テンソル式によるシェルの微分方程式

a) ひずみと変位の関係式

ひずみ　$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - u_3 b_{\alpha\beta}$ ---(1)　　せん断ひずみ　$\gamma_{3\alpha} = \frac{1}{2}(u_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda + \sqrt{a}\, e_{\alpha\lambda}\theta^\lambda)$ ---(2)

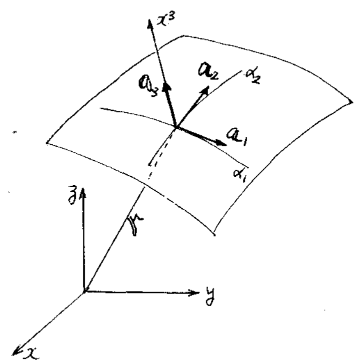
曲率　$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{a}\left(e_{\alpha\lambda}\theta^\lambda|_\beta + e_{\beta\lambda}\theta^\lambda|_\alpha\right) - \frac{1}{2}\left(b_\alpha^\lambda u_{\lambda|\beta} + b_\beta^\lambda u_{\lambda|\alpha} - 2u_3 b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}\right)$ ---(3)

b) 応力とひずみの関係式

直応力　$\sigma^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\gamma\delta}(\varepsilon_{\gamma\delta} + x^3\chi_{\gamma\delta})$ ---(4)　　せん断応力　$\tau^{3\alpha} = E^{3\alpha3\beta}\gamma_{3\beta}$ ---(5)

c) 釣合條件式　　$\sigma^{\alpha\lambda}|_\lambda + X^\alpha = 0$ ---(6)

ただし, $u_{\alpha|\beta} = u_{\alpha,\beta} - u_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ ---(7), $\theta^\alpha|_\beta = \theta^\alpha_{,\beta} + \theta^\lambda \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}$ ---(8) は u_α, θ^α の共変微分, x^3 はシェル中立面に直角方向の座標, u_3 は x^3 方向の変位である。



d) テンソル量の定義とその行列による表現

シエルの中立面上の1点(位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とする)に作られた面内の曲線座標 α_1, α_2 方向を向くベクトルを $\mathbf{a}_1 = \partial\mathbf{r}/\partial\alpha_1$, $\mathbf{a}_2 = \partial\mathbf{r}/\partial\alpha_2$, 座標 x^3 方向の単位ベクトルを $\mathbf{a}_3$ とすると, 式(1)〜(8)で使用しているテンソル量の意味は, 次の左の通りであり, これらをそれぞれの右に示す行列で表わすことにする。

名称		行列表現	定義式
共変第一基本計量テンソル	$a_{\alpha\beta}$	$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \end{bmatrix}[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]$　$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_1}$　$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha_2}$
反変第一基本計量テンソル	$a^{\alpha\beta}$	$\mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix}$	
共変第二基本計量テンソル	$b_{\alpha\beta}$	$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$	$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3^T\mathbf{a}_{1,1} & \mathbf{a}_3^T\mathbf{a}_{2,1} \\ \mathbf{a}_3^T\mathbf{a}_{1,2} & \mathbf{a}_3^T\mathbf{a}_{2,2} \end{bmatrix}$
混合第二基本計量テンソル	b_α^β	$\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1} = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{bmatrix}$	$b_\alpha^\beta = b_{\alpha\lambda}a^{\lambda\beta}$
交代テンソル	$\sqrt{a}\,e_{\alpha\beta}$	$\sqrt{a}\,\mathbb{e} = \sqrt{a}\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$	$a = \|\mathbb{A}\|$　$\mathbb{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
クリストッフェルの三字記号	$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$	$\mathbb{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 \end{bmatrix}$ $\mathbb{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix}$	$\mathbb{\Gamma}_1 = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} a_{11,1} & 2a_{12,1} \\ 0 & a_{22,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_{11,2} \\ a_{11,2} & 0 \end{bmatrix}\right\}\mathbb{A}^{-1}$ $\mathbb{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} a_{11,2} & 0 \\ 2a_{21,2} & a_{22,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{22,1} \\ -a_{22,1} & 0 \end{bmatrix}\right\}\mathbb{A}^{-1}$

名称		行列表現
変位の共変テンソル	u_α	$\mathbb{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$
回転の反変テンソル	θ^α	$\mathbb{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{bmatrix}$
せん断ひずみテンソル	$\gamma_{3\alpha}$	$\boldsymbol{\gamma}_3 = \begin{bmatrix} 2\gamma_{31} \\ 2\gamma_{32} \end{bmatrix}$
ひずみテンソル	$\varepsilon_{\alpha\beta}$	$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{22} \end{bmatrix}$
曲率テンソル	$\chi_{\alpha\beta}$	$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{21} \\ \chi_{12} \\ \chi_{22} \end{bmatrix}$

名称		行列表現
応力テンソル	$\sigma^{\alpha\beta}$	$\mathbb{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{21} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{22} \end{bmatrix}$
せん断弾性定数テンソル	$E^{3\alpha3\beta}$	$\mathbb{D}_A = \frac{E}{2(1+\nu)}\mathbb{A}^{-1}$
弾性定数テンソル	$(E^{\alpha\beta\gamma\delta})$	$\mathbb{D} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left\{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{11} \\ a^{21} \end{bmatrix}[a^{11}\ a^{21}] & \begin{bmatrix} a^{12} \\ a^{22} \end{bmatrix}[a^{11}\ a^{21}] \\ \begin{bmatrix} a^{11} \\ a^{21} \end{bmatrix}[a^{12}\ a^{22}] & \begin{bmatrix} a^{12} \\ a^{22} \end{bmatrix}[a^{12}\ a^{22}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^{11}\mathbb{A}^{-1} & a^{12}\mathbb{A}^{-1} \\ a^{21}\mathbb{A}^{-1} & a^{22}\mathbb{A}^{-1} \end{bmatrix}\right\} + \frac{E\nu}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} a^{11} \\ a^{21} \\ a^{12} \\ a^{22} \end{bmatrix}[a^{11}\ a^{21}\ a^{12}\ a^{22}]$

2. ひずみと変位の関係式の行列表示

まず，式(3)を書き変えることからはじめる。$a^{\alpha\beta}$，$b_{\alpha\beta}$が対称テンソルであるから，式(3)の最後の項に含まれる $b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}=b_{\alpha\delta}a^{\delta\lambda}b_{\lambda\beta}$ も対称であり，$2b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}=b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}+b_\beta^\lambda b_{\lambda\alpha}$ と書ける。また，テンソル解析で証明されている $(\sqrt{a})_{,\alpha}=\sqrt{a}\,\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}$ の関係を用いて，式(3)の第1項を変形すると，反変ベクトルの共変微分 $\sqrt{a}\,e_{\alpha\lambda}\theta^\lambda|_\beta$ が，共変ベクトル $v_\alpha\equiv\sqrt{a}\,e_{\alpha\lambda}\theta^\lambda$ の共変微分 $(\sqrt{a}\,e_{\alpha\lambda}\theta^\lambda)|_\beta$ になる。したがって

$$\chi_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left\{(\sqrt{a}\,e_{\alpha\lambda}\theta^\lambda)|_\beta+(\sqrt{a}\,e_{\beta\lambda}\theta^\lambda)|_\alpha\right\}-\frac{1}{2}\left\{b_\alpha^\lambda(u_{\lambda|\beta}-u_3b_{\lambda\beta})+b_\beta^\lambda(u_{\lambda|\alpha}-u_3b_{\lambda\alpha})\right\}\cdots(9)$$

つぎに，$\gamma_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(s_{\alpha\beta}+s_{\beta\alpha})$ の形をしたテンソルの行列表示を考えてみると

$$\begin{bmatrix}\gamma_{11}&\gamma_{12}\\\gamma_{21}&\gamma_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}s_{11}&s_{21}\\s_{12}&s_{22}\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}s_{11}&\frac{1}{2}(s_{12}+s_{21})\\\frac{1}{2}(s_{21}+s_{12})&s_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\gamma_{11}\\\gamma_{21}\\\gamma_{12}\\\gamma_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_{11}\\\frac{1}{2}(s_{21}+s_{12})\\\frac{1}{2}(s_{12}+s_{21})\\s_{22}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}s_{11}\\s_{21}\\s_{12}\\s_{22}\end{bmatrix}$$

となり，$\gamma_{\alpha\beta}$は対称テンソルである。これは右のようにベクトルで表わすこともできる。ひずみや曲率のテンソルでは，γ_{21}，γ_{12}はせん断ひずみやねじれ率を意味しているが，工学ではこれらの和に意味があり，γ_{21}，γ_{12}の区別はそれほど重要ではない。したがって，右上の矢印のあとのように書くこともゆるされるであろう。以上のように考えて，ひずみと変位の関係式を行列表示すると次のようになる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}-\boldsymbol{\Gamma}_1\\\frac{\partial}{\partial\alpha_2}-\boldsymbol{\Gamma}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1\\\boldsymbol{b}_2\end{bmatrix}w,\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\\\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\end{bmatrix}w+\mathbf{BA}^{-1}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}+\sqrt{a}\,\mathbf{e}\begin{bmatrix}\theta^1\\\theta^2\end{bmatrix}$$

ただし $\frac{\partial}{\partial\alpha_i}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}&0\\0&\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{b}_2]=\mathbf{B}$，$w=u_3$ とおいた。

$$\boldsymbol{\chi}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}-\boldsymbol{\Gamma}_1\\\frac{\partial}{\partial\alpha_2}-\boldsymbol{\Gamma}_2\end{bmatrix}\sqrt{a}\,\mathbf{e}\begin{bmatrix}\theta^1\\\theta^2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{BA}^{-1}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}-\boldsymbol{\Gamma}_1\right]\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}-\boldsymbol{b}_1w\right\}\\\mathbf{BA}^{-1}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_2}-\boldsymbol{\Gamma}_2\right]\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}-\boldsymbol{b}_2w\right\}\end{bmatrix}$$

または

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\\boldsymbol{\chi}\\\boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c:c}\partial/\partial\alpha_1-\boldsymbol{\Gamma}_1&-\boldsymbol{b}_1&\mathbf{0}\\\partial/\partial\alpha_2-\boldsymbol{\Gamma}_2&-\boldsymbol{b}_2&\mathbf{0}\\\hdashline-\mathbf{BA}^{-1}(\partial/\partial\alpha_1-\boldsymbol{\Gamma}_1)&\mathbf{BA}^{-1}\boldsymbol{b}_1&\partial/\partial\alpha_1-\boldsymbol{\Gamma}_1\\-\mathbf{BA}^{-1}(\partial/\partial\alpha_2-\boldsymbol{\Gamma}_2)&\mathbf{BA}^{-1}\boldsymbol{b}_2&\partial/\partial\alpha_2-\boldsymbol{\Gamma}_2\\\hdashline\mathbf{BA}^{-1}&\begin{matrix}\partial/\partial\alpha_1\\\partial/\partial\alpha_2\end{matrix}&\mathbf{E}\end{array}\right]\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\hdashline w\\\hdashline\sqrt{a}\,\theta^2\\-\sqrt{a}\,\theta^1\end{bmatrix}\cdots(10)$$

3. 断面力とひずみの関係式

面内断面力は $N^{\alpha\beta}=\int\sigma^{\alpha\beta}dx^3=hE^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta}$，曲げモーメントは $M^{\alpha\beta}=\int x^3\sigma^{\alpha\beta}dx^3=\frac{h^3}{12}E^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi_{\gamma\delta}$

x^3軸方向のせん断力は $S^{3\alpha}=\int\tau^{3\alpha}dx^3=hE^{3\alpha3\beta}\gamma_{3\beta}$ であるが，これを行列表示すると，次のようになる。

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}N^{11}\\N^{21}\\N^{12}\\N^{22}\end{bmatrix}=h\mathbf{D}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{21}\\\varepsilon_{12}\\\varepsilon_{22}\end{bmatrix},\quad \mathbf{M}=\begin{bmatrix}M^{11}\\M^{21}\\M^{12}\\M^{22}\end{bmatrix}=\frac{h^3}{12}\mathbf{D}\begin{bmatrix}\chi_{11}\\\chi_{21}\\\chi_{12}\\\chi_{22}\end{bmatrix},\quad \mathbf{S}_3=\begin{bmatrix}S^{31}\\S^{32}\end{bmatrix}=h\mathbf{D}_s\begin{bmatrix}\gamma_{31}\\\gamma_{32}\end{bmatrix}$$

または

$$\begin{bmatrix}\mathbf{N}\\\mathbf{M}\\\mathbf{S}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h\mathbf{D}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\frac{h^3}{12}\mathbf{D}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&h\mathbf{D}_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}\\\boldsymbol{\chi}\\\boldsymbol{\gamma}_3\end{bmatrix}\cdots(11)$$

4. 基本計量テンソルの計算と変位の仮定

$$\mathbf{r}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}g_i(\xi,\eta)&0&0\\0&g_i(\xi,\eta)&0\\0&0&g_i(\xi,\eta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{bmatrix}$$

アイソパラメトリック要素を用い，要素内の任意点の座標(x,y,z)を補間関数を用いて右のように書くことにする。また，要素内のξ，η座標を曲線座標α_1，α_2とみなすと，前頁の表の左側に書いた基本計量テンソルは，定義式にしたがって計算できる。変位は，一般のアイソパラメトリック要素と同じように，$u_1=\sum g_i(\xi,\eta)u_{1i}$，……，$\sqrt{a}\,\theta^1=\sum g_i(\xi,\eta)(\sqrt{a}\,\theta^1)_i$ と仮定する。ただし，要素毎に座標が異なるので，このままでは節点方程式を作るのに都合が悪い。接続点毎に座標変換をする必要がある。x,y,z方向の単位ベクトルを$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$とすると，接続点のベクトルは次の3通りに書ける。

$$\mathbf{v}=v_x\mathbf{e}_1+v_y\mathbf{e}_2+v_z\mathbf{e}_3=v_1\mathbf{a}^1+v_2\mathbf{a}^2+v_3\mathbf{a}^3=v^1\mathbf{a}_1+v^2\mathbf{a}_2+v^3\mathbf{a}_3$$

シェルの場合は，$\mathbf{a}_\alpha\mathbf{a}^\beta=\delta_\alpha^\beta$，$\mathbf{a}_3=\mathbf{a}^3$であることを考慮し，$\mathbf{v}$に変位ベクトルおよび回転ベクトルを用いると，

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\w\end{bmatrix}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^T\\\mathbf{a}_2^T\\\mathbf{a}_3^T\end{bmatrix}_i[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}_i,\quad \begin{bmatrix}\theta^1\\\theta^2\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{a}}\begin{bmatrix}(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3)^T\\(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1)^T\\\mathbf{0}\end{bmatrix}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\begin{bmatrix}\theta_x\\\theta_y\\\theta_z\end{bmatrix}\cdots(13)$$

左のようになる（ただし $\sqrt{a}\,e_{ijk}\mathbf{a}^k=\mathbf{a}_i\times\mathbf{a}_j$，$[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]=\mathbf{E}$）あとは，FEMの普通の手法を用いて，要素の基本式を作ればよい。