I-58　最小二乗変分原理に基づく有限要素法（その２）

川崎重工業鉄構事業部　正員　坂井藤一

1. まえがき

筆者は先の報告において[1]、ＦＥＭの基礎変分原理として最小二乗法を導入することについて述べ、その特質上から従来の有限要素法にない広範な応用が期待されるであろうと述べた。最小二乗法は weighted residuals method の一種として位置づけられるが、それはまた構造力学において最も基本的なエネルギー原理と深い関係にある。実際、弾性学におけるエネルギー原理や一般仮想仕事の原理は最小二乗法とまったく等価であることを示すことができる。[2] この点は"エネルギ原理がいかに成立するか"を物語るものとして興味深い。また、最小二乗法は時系列問題への有限要素法の適用を可能にした。実際、時間．空間両軸で構成される空間を有限要素法で近似することが差分法と同様に無理なく（consistentに）行なえる。[3]

ここでは、最小二乗原理をさらに拡張した形の変分原理について若干の考察と応用を示すことにする。仮にこの形の変分原理を停留二乗原理と呼んでおく。

2. 停留二乗原理

次の方程式を考えよう。

$$Au - f = 0 \quad \text{in } V \tag{1}$$

ここで、Ａ：non-self-adjoint operator

Ｕは境界Su で所与の条件を満足するものとして最小二乗法は次のように設定される。

$$I = \frac{1}{2}\int_V (Au - f)^2 dx \tag{2}$$

$$\delta I(u) = 0 \tag{3}$$

さて、（１）式に次の付帯条件が存在するとする。

$$Mu - g = 0 \quad \text{in } V \text{ or on } Su \tag{4}$$

この時最小二乗汎関数は次のようになる。

$$I = \frac{1}{2}\int_V (Au - f)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{V \text{ or } Su} \lambda (Mu - g)^2 dx \tag{5}$$

付帯条件は方程式に関するものでも境界条件に関するものでもかまわない。この点で最小二乗法は、Hellinger-Reissner 原理や Lagrange　法と類似している。λは乗数であり、重みでもある。

ここで、$\lambda > 0$　とする。したがって

$$\delta I(u) = 0 \text{ に対し } \delta^2 I > 0 \tag{6}$$

なる最小原理が成立する。

今、$\lambda < 0$ の場合を考えると、もはや最小原理は成立せず、汎関数ので値性．対称性も保証されない。故にこの時は停留原理とするのが妥当である。これを基礎原理としてＦＥＭに応用する。

3. 応用例

3－1　動力学の変分原理

次の運動方程式を考える。

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ny - f = 0 \tag{7}$$

上式を次のように変換する。( )˙ は時間微分を示す。

$$v = m\dot{y}, \quad w' = ny \tag{8}$$

汎関数を次のように設定しよう。

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{1}{m}(m\dot{y} - v)^2 - \frac{1}{n}(ny - \dot{w})^2\right]dt \tag{9}$$

この停留条件を考えると、その結果は Hamilton 原理とそれに相補な Toupin 原理の一般化に相当している。式(9)を用いて初期値問題をＦＥＭによつて数値積分した結果を表－１に示す。

3－2　無限領域への波動伝播[4]

我々はしばしば無限連続体の波動伝播を問題にしなければならないことがある。たとえば、地震波．河海の波．音波．電磁波等々。このような現象をどのようにモデル化して有限なコンピューターにのせるか。これには仮想境界を必要とし、そこでは無反射の条件が成り立たねばならない。これはある意味で初期値問題との共通点を思わせる。実際、定常波動の Helmholtz 方程式から出発して、前記の原理よりＦＥＭ解析を行なうことができる。港湾における津波伝播の解析例を図－１に示す。

表－1は、(7)式において　m＝n＝1，f＝0、かつ、初期条件　y(0)＝1，y'(0)＝0　の下での解 y＝cost を前述の停留二乗FEMあるいは最小二乗FEMを用いて近似し、さらに他の数値解と比較したものである。これから次のような諸点を指摘できよう。

1）単純な差分に比べるとFEMの精度はよい。

2）中央差分やHamilton　FEMは初期条件により精度が悪化する。

3）二乗型FEMはGalerkin　法に比し精度がよい。これは自然条件がconsistent　であるためと思われる。

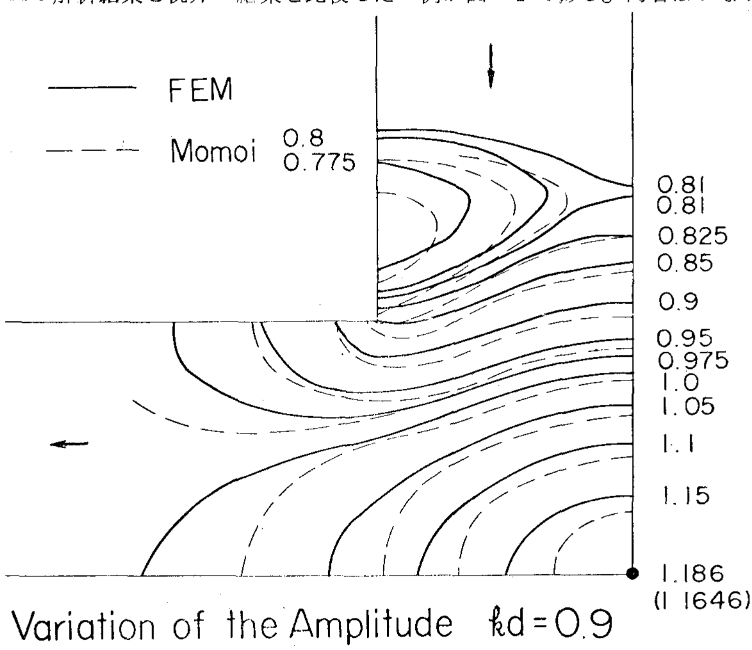
method ＼ t		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.571	1.6
Exact		0.980	0.921	0.825	0.697	0.540	0.362	0.170	0.000	-0.029
FDM	explicit	1.000	0.960	0.880	0.762	0.608	0.424	0.216	0.023	-0.009
	implicit	0.962	0.888	0.783	0.652	0.501	0.336	0.165	0.018	-0.006
	central	1.000	0.960	0.882	0.768	0.623	0.453	0.266	0.071	0.068
FEM	Galerkin	0.974	0.910	0.811	0.681	0.526	0.352	0.167	0.005	-0.022
	Hamilton	1.000	0.960	0.882	0.770	0.627	0.459	0.272	0.077	0.074
	least sq.	0.980	0.922	0.827	0.700	0.545	0.369	0.179	0.010	-0.019
	stat. sq.	0.980	0.921	0.825	0.697	0.540	0.362	0.170	0.000	-0.029

表－1　Y＝cost　に対する数値結果の比較

4）停留二乗FEMは小数点以下3けたまで厳密解と一致し、他に比べ断然精度がよい。

次に、図－1は水の重力波動の伝播を解析したものである。たとえば、津波は長波として扱うことができるが、港湾に侵入するにつれて、水深変化や地形の影響を受けて複雑に変形する。桃井は、直角に屈曲し水深一定の港湾モデルに対し、フーリエ級数を用いて解析した結果を示している。最大波高と入射波高の比率の各地点での分布について、FEMの解析結果と桃井の結果を比較した一例が図－1である。両者はかなり良く一致していることが分る。

この例に見るように、この方法は変分原理の自然条件を利用して、無反射の境界をうまく設定することができるので、従来の差分法などによるものよりも便利である。



k：波数（2π／波長）
d：水路巾

図－1　屈曲した港湾における津波の伝播

文献

1）坂井藤一：河合三四郎：最小二乗変分原理に基づく有限要素法，第28回土木学会年次学術講演会概要

2）坂井藤一：一般化された変分原理に対する一寄与　（投稿準備中）

3）坂井藤一：有限要素法と差分法の等価性およびある離散化手法，土木学会論文報告集第220号

4）坂井藤一：無限領域への波動伝播について，京都大学数理解析研究所FEM共同研究資料，1974－6