

京都大学工学部 正員 丹羽義次

京都大学工学部 正員 小林昭一

○ 京都大学大学院 学生員 中村 昭

1. はじめに

種々の物理現象のうち輸送方程式の形で表わせるものは多い。このような問題は有限要素法を用いれば、有利に解くことができる。有限要素法に変換する際には、適当な汎関数が見つからなくとも重みつき残差法 (W. R. M.) を用いて容易に定式化することができる。本研究は、輸送問題に有限要素法を適用して、数値計算を試みたものである。

2. 解析法

以下、W. R. M. による有限要素法の定式化の概要を述べる。

いま境界 \$\partial S\$ で囲まれた領域 \$S\$ で微分方程式および境界条件が次のように与えられているものとする。

$$S \text{ で } L(\{\phi\}) = a\phi_{xx} + b\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi + g\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} \partial S_1 \text{ で } \phi = \phi(\phi) \\ \partial S_2 \text{ で } a\phi_x n_x + b\phi_y n_y = \phi_n(\phi) \end{cases} \quad (2)$$

\$n\$ は境界での法線を表わす。

\$S\$ を有限要素に分割し求めようとする関数 \$\{\phi\}\$ を各要素 \$e\$ について次の形に仮定する。

$$\{\phi\} = [N] \{\phi\}^e \quad (3)$$

ここに \$[N]\$ は形状関数、\$\{\phi\}^e\$ は要素節点における中の値である。式(3)は一般には式(1)を満足せず剰余 \$R\$ を生ずる。Galerkin法に従って重み関数として \$[N_i]\$ (\$i=1, \dots, n\$) を採用し、W. R. M. を適用すれば、次式より \$\{\phi\}^e\$ が求まる。

$$\int_S [N_i] L([N] \{\phi\}^e) dV = 0 \quad (4)$$

いま要素として三角形要素、\$[N_i]\$ として線形な形状関数を選べば

$$[N_i] = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \quad (5)$$

\$\Delta\$: 三角形要素の面積

式(4)は次のようにマトリックス表示できる。

$$([H_1] + [H_2] + [H_3] + [H_4]) \{\phi\}^e + [H_4] \{\phi\}_{t-\Delta t}^e + \{F\} = 0 \quad (6)$$

$$[H_1] = \begin{bmatrix} a b_i b_i + b c_i c_i & a b_i b_j + b c_i c_j & a b_i b_m + b c_i c_m \\ & a b_j b_j + b c_j c_j & a b_j b_m + b c_j c_m \\ \text{SYM.} & & a b_m b_m + b c_m c_m \end{bmatrix} \times \frac{1}{4\Delta}$$

$$[H_2] = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} d b_i + e c_i & d b_j + e c_j & d b_m + e c_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad [H_3] = -\frac{f\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[H_4] = -\frac{g\Delta}{12\Delta t} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = - \int_{\partial S} [N_i] \phi_n d\sigma$$

