

京都大学工学部 正員 丹羽義次
 京都大学工学部 正員 小林昭一
 ○ 京都大学大学院 学生員 中村 昭

1. はじめに

種々の物理現象のうち輸送方程式の形で表わせるものは多い。このような問題は有限要素法を用いれば有利に解くことができる。有限要素法に変換する際には、適当な汎関数が見つからなくとも重みつき残差法(W.R.M.)を用いて容易に定式化することができる。本研究は、輸送問題に有限要素法を適用して、数値計算を試みたものである。

2. 解析法

以下、W.R.M.による有限要素法の定式化の概要を述べる。

いま境界 ∂S で囲まれた領域 S で微分方程式および境界条件が次のように与えられているものとする。

$$S \text{ で } L(\{\phi\}) = a\phi_{xx} + b\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi + g\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial S_1 \text{ で } \phi = \phi(s) \\ \partial S_2 \text{ で } a\phi_x n_x + b\phi_y n_y = \phi_n(s) \end{array} \right. \quad (2)$$

これは境界での法線を表わす。

S を有限要素に分割し求めようとする関数 $\{\phi\}$ を各要素 e について次の形に仮定する。

$$\{\phi\} = [N] \{\phi\}^e \quad (3)$$

ここに $[N]$ は形状関数、 $\{\phi\}^e$ は要素節点における中の値である。式(3)は一般には式(1)を満足せず剰余 R を生ずる。Galerkin法に従って重み関数として $[N_i]$ ($i=1, \dots, n$)を採用し、W.R.M.を適用すれば次式より $\{\phi\}^e$ が求まる。

$$\int_S [N_i] L([N] \{\phi\}^e) dv = 0 \quad (4)$$

いま要素として三角形要素、 $[N_i]$ として線形な形状関数を選べば

$$[N_i] = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \quad (5)$$

Δ : 三角形要素の面積

式(4)は次のようにマトリックス表示できる。

$$([H_1] + [H_2] + [H_3] + [H_4]) \{\phi\}^e + [H_4] \{\phi\}_{t-\Delta t}^e + \{F\} = 0 \quad (6)$$

$$[H_1] = \begin{bmatrix} ab_i b_i + bc_i c_i & ab_i b_j + bc_i c_j & ab_i b_m + bc_i c_m \\ ab_j b_i + bc_j c_i & ab_j b_j + bc_j c_j & ab_j b_m + bc_j c_m \\ ab_m b_i + bc_m c_i & ab_m b_j + bc_m c_j & ab_m b_m + bc_m c_m \end{bmatrix} \times \frac{1}{4\Delta}$$

$$[H_2] = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} db_i + ec_i & db_j + ec_j & db_m + ec_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad [H_3] = -\frac{f\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[H_4] = -\frac{g\Delta}{12\Delta t} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = - \int_{\partial S} [N_i] \Phi_n ds$$

ここに $\{ \text{中} \}_{t-\Delta t}^e$ は時刻 $(t-\Delta t)$ での中の値である。

したがって式(6)を適當な初期条件のもとで Δt に関して逐次計算すれば中の値が求まる。

3. 解析例

解析例として図1のように地下に開削された空洞を想定し、空洞からの放射性イオンの拡散問題を考える。

拡散方程式は次の通りである。

$$(D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}) - (v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \frac{\partial C}{\partial y}) - \frac{e}{\rho} (K_{ab} + \lambda) C - (1 + \frac{\rho}{e} K_{ad}) \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

ここに C : 気相中のイオン濃度 (g/cm^3), D_x, D_y : 拡散係数 (cm^2/sec), v_x, v_y : 気体の流速 (cm/sec), ρ : 土粒子の密度, e : 間げき比, K_{ab} : イオンの吸着係数 ($\text{cm}^3/\text{g}\cdot\text{sec}$), K_{ad} : イオンの付着係数 (cm^3/g) λ : 減衰係数 ($1/\text{sec}$)。

また気体の輸送方程式は

$$K_x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \alpha \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad \alpha = \beta \frac{e}{1+e}$$

ここに K_x, K_y : 透気係数 (cm^3/sec), P : 気体の圧力 (kg/cm^2), β : 圧縮率。

数値シミュレーションとして、図2のような空洞内圧が生じたときの空洞周辺の過渡的な圧力分布、イオン濃度分布の一例を図3、図4に示す。解析結果、要素分割、時間分割など詳細は当日発表する。

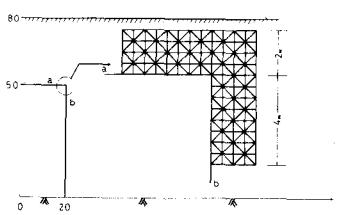


図 1

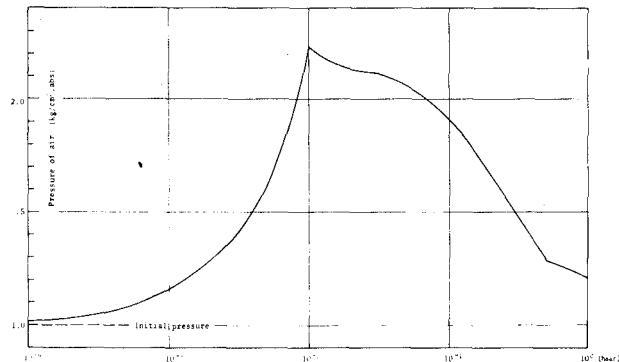


図 2

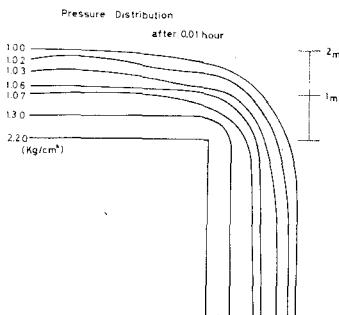


図 3

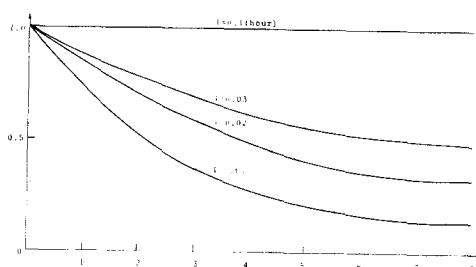


図 4