I-56　有限要素法による動的解析の一方法

中央大学　正会員　川原睦人
清水建設　〃　○竹脇尚信
〃　〃　斉藤一郎

1. はじめに

構造物と地盤を一体として、有限要素法を用いて動的解析する場合、色々な問題が生ずるがこの小論では次の2点について考える。

(1). 側方の境界条件をいかに設定するか

(2). 振動方程式の縮小

(1)の問題については、一般的には側方境界をローラー又はバネあるいはダッシュポットでおきかえており、文献(1)では遠方での地盤の振動を考慮している。この小論では側方へ無限に続く帯状要素(以下、半無限要素という)を考える。一方、(2)の問題については文献(2)の方法がよく用いられているが、マトリックスの縮小に際して減衰項の影響が無視されているので、ここではそれをも考慮した縮小方法を考える。

2. 振動方程式の誘導

この誘導はテンソル記法を用いて記述する。

2-1. 運動方程式

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (1)$$

但し、σ_{ij} は応力テンソル、f_i は単位体積当りの物体力、ρ は密度、u_i は i 軸方向への変位、・は時間に関する微分を表わす。

2-2. 適合方程式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (2)$$

但し、ε_{ij} は歪テンソルである。

2-3. 構成方程式

内部減衰を考慮する為に、フォークトモデルを用いることにして以下にその構成方程式を誘導する。

平均垂直応力と平均垂直歪は弾性関係にあるとして

$$\frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{kk} \qquad (3)$$

但し、λ 及び μ はラーメの定数である。

偏差応力と偏差歪は、偏差歪速度に比例する応力が生ずるフォークトモデルを考えて、

$$\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) + 2\kappa(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij}) \qquad (4)$$

但し、κ は粘性係数で δ_{ij} は単位テンソルである。

(3)式を(4)式に代入して次式を得る。

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} + C'_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \qquad (5)$$

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (6)$$

$$C'_{ijkl} = \kappa(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{2}{3}\kappa\delta_{ij}\delta_{kl} \qquad (7)$$

2-4. エネルギー方程式

(1)式に仮想変位 $\overset{*}{u}_i$ を用いて変形すれば

$$\int_v \rho \overset{*}{u}_i \ddot{u}_i dv + \int_v \overset{*}{\varepsilon}_{ij}\sigma_{ij} dv = \int_s \overset{*}{u}_i S_i ds + \int_v \overset{*}{u}_i f_i dv \qquad (8)$$

となり、S_i は境界での釣合より、

$$S_i = \sigma_{ij} n_j \qquad (9)$$

である。但し、n_j は境界に立てた外向き法線の方向余弦である。

2-5. 運動方程式のマトリックス表示

任意の有限要素の節点 α における i 軸方向の変位を $u_{\alpha i}$ として、要素内部の変位を変位関数 φ_α を用いて次のように仮定する。

$$u_i = \varphi_\alpha u_{\alpha i} \qquad (10)$$

同様に仮想変位も

$$\overset{*}{u}_i = \varphi_\alpha \overset{*}{u}_{\alpha i} \qquad (11)$$

とおく。そして、(11)式及び(2)式を(8)式に代入して、仮想変位が任意であることを考慮すれば、

$$\int_v \rho \varphi_\alpha \ddot{u}_i dv + \int_v \varphi_{\alpha,j}\sigma_{ij} dv = \Omega_{\alpha i} \qquad (12)$$

$$\Omega_{\alpha i} = \int_s \varphi_\alpha S_i ds + \int_v \varphi_\alpha f_i dv \qquad (13)$$

となる。

次に、構成方程式を用いて(12)式に含まれる応力を消去する。このとき、動的な変位も節点変位を用いて一義的に表わされると仮定する。(5)式に(2)式及び(10)式を代入すれば

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varphi_{\beta,l}u_{\beta k} + C'_{ijkl}\varphi_{\beta,l}\dot{u}_{\beta k}$$

となり、加速度も(10)式と同様に

$$\ddot{u}_i = \varphi_\alpha \ddot{u}_{\alpha i}$$

と仮定してこれらの2式を(12)式に代入する。そうすれば次のような方程式を得る。

$$M_{\alpha i\beta k}\ddot{u}_{\beta k} + C_{\alpha i\beta k}\dot{u}_{\beta k} + K_{\alpha i\beta k}u_{\beta k} = \Omega_{\alpha i} \qquad (14)$$

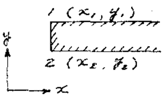
$$M_{\alpha i \beta k} = \int_V \rho \varphi_\alpha \varphi_\beta \delta_{ik} \, dv \tag{15}$$

$$C_{\alpha i \beta k} = \int_V \varphi_{\alpha,j} C'_{ijkl} \varphi_{\beta,l} \, dv \tag{16}$$

$$K_{\alpha i \beta k} = \int_V \varphi_{\alpha,j} E_{ijkl} \varphi_{\beta,l} \, dv \tag{17}$$

この(14)式をすべての要素について立て、それらを重ね合せることにより全体系の方程式が求められるから、それを与えられた境界条件のもとに解けばよい。

3. 半無限要素について



右図のような、側方へ無限に続く要素を考えて、(10)式における変位関数を次のように仮定する。

$$\varphi_1 = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} e^{k(x_1 - x)} \tag{18}$$

$$\varphi_2 = -\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} e^{k(x_2 - x)} \tag{19}$$

但し、$k > 0$ とする。

変位関数を(18)式及び(19)式で仮定するとき、(15)～(17)式が収束しなければならないが、ρ を一定とするときには

$$I = \int_a^\infty \varphi_\alpha \varphi_\beta \, dx$$

の型の積分が収束すればよく、それには $k > 0$ であれば十分である。

4. 方程式の縮小

構造物の支点から同位相の地震加速度 $\ddot{u}_0$ が入力する場合、振動方程式は次のように書ける。

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M\ddot{u}_0 \tag{20}$$

但し、M, C, K はそれぞれ質量、減衰、剛性の各マトリックスで u は相対変位である。

(20)式を動的解析に用いる自由度 u_1 と消去される自由度 u_2 に分けると

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} M_{10} \\ M_{20} \end{bmatrix} \times \{\ddot{u}_0\}$$

今、地盤の振動を調和振動とすれば

$$u_0 = x_0 e^{i\omega t}, \quad u_1 = x_1 e^{i\omega t}, \quad u_2 = x_2 e^{i\omega t}$$

とおけるから、これらの式を前の式に代入すれば

$$\{(K_{11} - \omega^2 M_{11} + i\omega C_{11}) - (K_{12} - \omega^2 M_{12} + i\omega C_{12}) \times (K_{22} - \omega^2 M_{22} + i\omega C_{22})^{-1} \times (K_{21} - \omega^2 M_{21} + i\omega C_{21})\} x_1$$
$$= Q_1 - (K_{12} - \omega^2 M_{12} + i\omega C_{12}) \times (K_{22} - \omega^2 M_{22} + i\omega C_{22})^{-1} Q_2 \tag{21}$$

但し、$Q_1 = \omega^2 M_{10} x_0$, $Q_2 = \omega^2 M_{20} x_0$ である。

次に、(21)式に含まれる $(K_{22} - \omega^2 M_{22} + i\omega C_{22})^{-1}$ を展開する。そのとき

$$(A + iB)^{-1} = (A + BA^{-1}B)^{-1} - iA^{-1}B(A + BA^{-1}B)^{-1} \tag{22}$$

なる関係を用いて、$A = K_{22} - \omega^2 M_{22}$, $B = \omega C_{22}$ とおき

$$A^{-1} = (K_{22} - \omega^2 M_{22})^{-1} = (I - \omega^2 K_{22}^{-1} M_{22})^{-1} K_{22}^{-1}$$
$$= (I + \omega^2 K_{22}^{-1} M_{22} + \omega^2 K_{22}^{-1} M_{22} \omega^2 K_{22}^{-1} M_{22} + \cdots) K_{22}^{-1}$$

で低次の K_{22}^{-1} が支配的と考えて、高次の項を無視すれば次のようになる。

$$A^{-1} = K_{22}^{-1} + \omega^2 K_{22}^{-1} M_{22} K_{22}^{-1}$$

同様な考え方で(22)式の右辺の項を計算して $(K_{22} - \omega^2 M_{22} + i\omega C_{22})^{-1}$ を展開し、(21)式に代入し $u_1 = x_1 e^{i\omega t}$, $u_0 = x_0 e^{i\omega t}$ を用いると

$$M_1^* \ddot{u}_1 + C_1^* \dot{u}_1 + K_1 u_1 = -M_0^* \ddot{u}_0 \tag{23}$$

となり、これが縮小された方程式である。 但し、

$$M_1^* = M_{11} + K_{12} K_{22}^{-1} (M_{22} - C_{22} K_{22}^{-1} C_{22}) K_{22}^{-1} K_{21}$$
$$- M_{12} K_{22}^{-1} K_{21} + C_{12} K_{22}^{-1} C_{22} K_{22}^{-1} K_{21} - K_{12} K_{22}^{-1} M_{21}$$
$$+ K_{12} K_{22}^{-1} C_{22} K_{22}^{-1} C_{21} - C_{12} K_{22}^{-1} C_{21} \tag{24}$$

$$C_1^* = C_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} C_{21} + K_{21} K_{22}^{-1} C_{22} K_{22}^{-1} K_{21} - C_{12} K_{22}^{-1} C_{21} \tag{25}$$

$$K_1^* = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21} \tag{26}$$

$$M_0^* = M_{10} - K_{12} K_{22}^{-1} M_{20} \tag{27}$$

5. 検討

始めに半無限要素について考える。(18), (19)式を用いて(15)～(17)式を計算すれば、M は k を分母に含み、C 及び K は k を分母にもつ項と分子にもつ項の和よりなる要素がある。従って、k が大きい場合は M の影響は小さくなり、側方境界は固定に近い状態になる。逆に k が小さい場合は慣性力が大きくなるから、側方へ均質な地盤が無限に続くような状態を表わすことができる。

方程式の縮小に関しては、参考文献(2)と比較すれば M に関する項のみが違うことが分り、(24)式で C の含まれる項を落せば文献(2)のそれに一致する。式の誘導で、地盤の調和振動とテーラー展開を用いているので、C の影響が大きくて高周波成分の卓越する地震波には適当ではないと思われる。

参考文献

〔1〕 柴田、土岐、管野 「有限要素法による地盤の振動解析におけるモデル化の一方法」 第27回年次学術講演会講演概要集 第1部

〔2〕 R. J Guyan "Reduction of stiffness and mass matrices" AIAA Journal Vol 3. No. 2