I-55　有限要素法による運動の表現について

センチュリリサーチセンタ（株）　正員　武田　洋

1. 序文

有限要素法の発展により，連続体力学における非線形問題の数値的な解析が可能となってきた。また連続体力学における運動の記述方法はLagrangeの方法とEulerの方法に大別される[1,2]。ここでは連続体力学の定式に関連して，有限要素法を用いて固体力学における非線形問題を解析する場合の基礎方程式の定式について述べる。

2. 有限要素近似

一般に有限要素内部における位置 X_I, x_i および変位 U_I, u_i は，その要素を構成する節点における量を用いて補間され，次のようになる。

$$X_I = \hat{\Phi}_{IJA} X^{(e)}_{JA} \quad (L.1) \qquad x_i = \hat{\varphi}_{ijA} x^{(e)}_{jA} \quad (E.1)$$

$$U_I = \Phi_{IJ\alpha} U^{(e)}_{J\alpha} \quad (L.2) \qquad u_i = \varphi_{ij\alpha} u^{(e)}_{j\alpha} \quad (E.2)$$

ここで $\hat{\Phi}, \hat{\varphi}$ は変形前および変形後における形状に対する補間関数，Φ, φ は変位に対する補間関数であり，添字A, α は要素節点を表わし，ここでは総和規約に従うものとする。また $U = U_I \mathbf{I}_I = u_i \mathbf{i}_i$ であり

$$U_I = \delta_{Ii} \varphi_{ij\alpha} \delta_{jJ} U^{(e)}_{J\alpha} \quad (L.3) \qquad u_i = \delta_{iI} \Phi_{IJ\alpha} \delta_{Jj} u^{(e)}_{j\alpha} \quad (E.3)$$

ここで $\delta_{jJ} = \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{I}_J = \delta_{Jj}$ はシフタであり[2]，(2), (3)式より次の関係が成立する。

$$\Phi_{IJ\alpha} = \delta_{Ii} \varphi_{ij\alpha} \delta_{jJ} \quad (L.4) \qquad \varphi_{ij\alpha} = \delta_{iI} \Phi_{IJ\alpha} \delta_{Jj} \quad (E.4)$$

変形後の位置 x_I は次のように表わせる。

$$x_I = X_I + U_I = \hat{\Phi}_{IJA} X^{(e)}_{JA} + \Phi_{IJ\alpha} U^{(e)}_{J\alpha} \quad (L.5)$$

変形前の位置 X_i は次のように表わせる。

$$X_i = x_i - u_i = \hat{\varphi}_{ijA} x^{(e)}_{jA} - \varphi_{ij\alpha} u^{(e)}_{j\alpha} \quad (E.5)$$

補間がisoparametricの場合(5)式は次のように表わせる。

$$x_I = \hat{\Phi}_{IJA} x^{(e)}_{JA} \quad (L.6) \qquad X_i = \hat{\varphi}_{ijA} X^{(e)}_{jA} \quad (E.6)$$

$$\hat{\Phi}_{IJA} = \delta_{Ii} \hat{\varphi}_{ijA} \delta_{jJ} \quad (L.7) \qquad \hat{\varphi}_{ijA} = \delta_{iI} \hat{\Phi}_{IJA} \delta_{Jj} \quad (E.7)$$

ただし，(7)式はisoparametricな要素の場合のみ成立する。

3. 有限要素系のエネルギー方程式

慣性項を省略した場合のエネルギー方程式は次のようになる。

$$\int_V \Sigma_{IJ} \left(\frac{\partial \Phi_{IK\alpha}}{\partial X_J} + \frac{\partial \Phi_{LM\alpha}}{\partial X_I} \frac{\partial \Phi_{LN\beta}}{\partial X_J} U^{(e)}_{N\beta} \right) dV = \int_S T_I \Phi_{IK\alpha}\, dS + \int_V B_I \Phi_{IK\alpha}\, dV \quad (L.8)$$

$$\int_v \sigma_{ij} \frac{\partial \varphi_{ik\alpha}}{\partial x_j}\, dv = \int_s t_i \varphi_{ik\alpha}\, ds + \int_v b_i \varphi_{ik\alpha}\, dv \quad (E.8)$$

ここで Σ_{IJ} は2nd Piola-Kirchhoffの応力テンソル，σ_{ij} はEulerの応力テンソル，T_I, t_i は表面力 B_I, b_i は物体力であり，V, v は体積，S, s は面積を表わす。また次の変換が成立する。

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{|F_{kK}|} F_{iI} F_{jJ} \Sigma_{IJ} \qquad (L.9)$$

$$\Sigma_{IJ} = \frac{1}{|f_{Kk}|} f_{Ii} f_{Jj} \sigma_{ij} \qquad (E.9)$$

ただしF_{kK}, f_{Kk}は変形勾配であり，次のように表わされる。

$$F_{kK} = \delta_{kK} + \delta_{kL} \frac{\partial \Phi_{LM\alpha}}{\partial X_K} U^{(e)}_{M\alpha} \qquad (L.10)$$

$$f_{Kk} = \delta_{Kk} - \delta_{Kl} \frac{\partial \varphi_{lm\alpha}}{\partial x_k} u^{(e)}_{m\alpha} \qquad (E.10)$$

弾性体の解析の場合には，(L.8)式に構成方程式を導入することにより，全荷重による節点変位を解くことができるが，ひずみが大きい場合，構成関係によってはそのとりあつかいに注意が必要とされ，また水圧のように，外部エネルギがEuler表示された場合の処置として荷重修正剛性マトリックスが導びかれることがOdenによって指摘されているが[3]，isoparametricでない要素の場合に注意が必要となる。

4．エネルギー方程式の増分形式

固体力学における非線形問題では，構成関係が履歴に依存するために増分形で表示される場合が多く，この場合のエネルギー方程式は文献(4, 5, 6)に与えられており有限要素系では次のようになる。

$$\int_V \Delta\Sigma_{IJ} \left(\frac{\partial \Phi_{IK\alpha}}{\partial X_J} + \frac{\partial \Phi_{MK\alpha}}{\partial X_I} \frac{\partial \Phi_{ML\beta}}{\partial X_J} U^{(e)}_{L\beta} \right) dV + \int_V \Sigma_{IJ} \frac{\partial \Phi_{MK\alpha}}{\partial X_I} \frac{\partial \Phi_{ML\beta}}{\partial X_J} \Delta U^{(e)}_{L\beta}\, dV = \Delta P^{(e)}_{K\alpha} + R^{(e)}_{K\alpha} \qquad (L.11)$$

$$\int_v \Delta\Sigma_{ij} \left(\frac{\partial \Phi_{ik\alpha}}{\partial X_j} + \frac{\partial \Phi_{mk\alpha}}{\partial X_i} \frac{\partial \Phi_{ml\beta}}{\partial X_j} \Delta U^{(e)}_{l\beta} \right) dv + \int_v \Sigma_{ij} \frac{\partial \Phi_{mk\alpha}}{\partial X_i} \frac{\partial \Phi_{ml\beta}}{\partial X_j} \Delta U^{(e)}_{l\beta}\, dv = \Delta P^{(e)}_{k\alpha} + R^{(e)}_{k\alpha} \qquad (EL.11)$$

ここで$\Delta P^{(e)}_{K\alpha}$, $\Delta P^{(e)}_{k\alpha}$は荷重増分であり，$R^{(e)}_{K\alpha}$, $R^{(e)}_{k\alpha}$は残差荷重修正であり次のように表わせる。

$$\Delta P^{(e)}_{K\alpha} = \int_S \Delta T_I \Phi_{IK\alpha}\, dS + \int_V \Delta B_I \Phi_{IK\alpha}\, dV \qquad (L.12)$$

$$\Delta P^{(e)}_{k\alpha} = \int_s \Delta T_i \Phi_{ik\alpha}\, ds + \int_v \Delta B_i \Phi_{ik\alpha}\, dv \qquad (E.12)$$

$$R^{(e)}_{K\alpha} = \int_S T_I \Phi_{IK\alpha}\, dS + \int_V B_I \Phi_{IK\alpha}\, dV - \int_V \Sigma_{IJ} \left(\frac{\partial \Phi_{JK\alpha}}{\partial X_I} + \frac{\partial \Phi_{NK\alpha}}{\partial X_I} \frac{\partial \Phi_{NL\beta}}{\partial X_J} U^{(e)}_{L\beta} \right) dV \qquad (L.13)$$

$$R^{(e)}_{k\alpha} = \int_s T_i \Phi_{ik\alpha}\, ds + \int_v B_i \Phi_{ik\alpha}\, dv - \int_v \Sigma_{ij} \frac{\partial \Phi_{ik\alpha}}{\partial X_j}\, dv \qquad (EL.13)$$

構成関係式は一般に

$$\Delta\Sigma_{IJ} = C_{IJKL} \left(\frac{\partial \Phi_{KM\alpha}}{\partial X_L} + \frac{\partial \Phi_{NM\alpha}}{\partial X_K} \frac{\partial \Phi_{NO\beta}}{\partial X_L} \Delta U^{(e)}_{O\beta} \right) \Delta U^{(e)}_{M\alpha} \qquad (L.14)$$

$$\Delta\sigma_{ij} = c_{ijkl} \left(\frac{\partial \varphi_{km\alpha}}{\partial x_l} - \frac{\partial \varphi_{nm\alpha}}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_{no\beta}}{\partial x_l} \Delta u^{(e)}_{o\beta} \right) \Delta u^{(e)}_{m\alpha} \qquad (EL.14)$$

であり，(L.14)式を(L.11)式に代入することにより完全なLagrangeの方法に基づく有限要素式が導びかれるが，(EL.11)式に対しては次の構成関係を用いる。

$$\Delta\Sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(\frac{\partial \Phi_{km\alpha}}{\partial X_l} + \frac{\partial \Phi_{nm\alpha}}{\partial X_k} \frac{\partial \Phi_{no\beta}}{\partial X_l} \Delta U^{(e)}_{o\beta} \right) \Delta U^{(e)}_{m\alpha} \qquad (EL.15)$$

ただし

$$C_{ijkl} = \frac{1}{|F_{mM}|} F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} C_{IJKL} \qquad (EL.16)$$

5．参考文献

(1) 山本善之“有限変位の弾性論”；岩波講座．現代応用数学．B.7-b.I，岩波書店

(2) A.C.Eringen "Mechanics of Continua" John Wiley & Sons, 1967

(3) J.T.Oden " Finite Element Applications in Nonlinear Structural Analysis" ASCE. 1969

(4) P.V.Marcal "Large Strain, Large Displacement Analysis" NATO Lecture, 1971

(5) L.D.Hofmeister et.al "Large Strain, Elasto-plastic Finite Element Analysis" AIAA, 1971

(6) K.Washizu "Variational Methods in Elasticity and Plasticity" 2nd. ed. Pergamon, 1974