

I-47 任意荷重の作用する場合の連続円筒シエルの解析

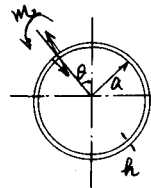
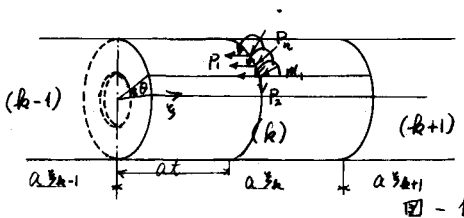
東京大学 正員 奥村敏恵
埼玉大学 正員 伊島良吉

1. まえがき

任意荷重の作用する円筒シエルに対する解析法としては、Bisgard, Kozalov 等による2重フーリエ級数に展開する解析法がある。又集中荷重(法線方向の)の作用する場合に対しては Darevskie, Flüge 等による研究がある。ここで Bisgard による方法は、荷重分布が狭くなるにつれて死力が発散し、集中荷重に近い荷重の作用する場合には不適当である。又 Darevskie 等による集中荷重に対する解は任意の分布荷重に適用することはできない。そこで本研究においては、任意の分布荷重(集中荷重を含む)が作用する場合の円筒の解析解を導き、さらに連続円筒シエルの解析にも適用できることを示した。ここで円筒の解は局所的な死力を表わす擾乱死力と、はり理論に対応する解の和で与えられ、はり理論に対応する解は、独自に transfer matrix で用いて得られる。

さらに連続円筒シエルの解析にも適用できることを示した。ここで円筒の解は局所的な死力を表わす擾乱死力と、はり理論に対応する解の和で与えられ、はり理論に対応する解は、独自に transfer matrix で用いて得られる。

2. 解析方法



$$\left. \begin{aligned} P_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \\ P_n &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \\ M_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} M_{1,n} \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \\ P_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,n} \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \end{aligned} \right\} (1)$$

(上側が対称荷重、下側が反対称荷重を表わす)

$s = s_k$ の断面に図のような集荷重 P, P_n, M_1 が載荷で作用する場合を考える。この M_2 に対しては該断面方向荷重から解を得ることとなる。ここで円筒の解析法としては、変位法によるものと、死力法による解析方法があり、変位法による場合は4階の微分方程式となるが、Novozhilov の複素死力法を用いれば、次の4階の複素微分方程式を解くことになる。

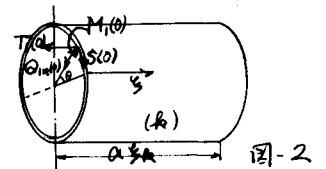
$$\Delta \Delta(\bar{\tau}) + \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial \theta^2} + 2i b^2 \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial s^2} = i 2 b^2 a \left\{ \Delta(P_n) + \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\partial P}{\partial s} \right\} \cdot (2) \quad \Delta(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \theta^2}$$

これより複素力 $\bar{\tau}$ の一般解は

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}^* + \left\{ C_0 + D_0 s + (C_2 + C_1 s) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right\} + \left\{ \tilde{A}_0 e^{d_0 s} + \tilde{B}_0 e^{d_0(s_2-s)} \right\} + \left\{ \tilde{A}_1 e^{d_1 s} + \tilde{B}_1 e^{d_1(s_2-s)} \right\} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \tilde{A}_n e^{d_n s} + \tilde{B}_n e^{d_n s} + \tilde{C}_n e^{d_1(s_2-s)} + \tilde{D}_n e^{d_2(s_2-s)} \right\} \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \quad (3)$$

ここで右辺第1項は式(1)の特解であり、第2項()内は、はり理論に対応する解であり、膜方程式から得られる結果と一致する。第3項()内は式(1)の同次解である。ここで同次解は、円筒 (k) の両端辺の境界擾乱死力を表わし、これによる境界量は、次の複素境界量を用いると便利である。

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_n &= \sum \bar{P}_{1,n} \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} = \sum (M_{1,n} + i E h C E_{2,n}) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \\ \bar{T}_1 &= \sum \bar{T}_{1,n} \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} = \sum (T_{1,n} - i E h C K_{2,n}) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \\ \bar{S} &= \sum \bar{S}_{1,n} \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} = \sum (S_{1,n} + i E h C K_{2,n}) \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \\ \bar{Q}_n &= \sum \bar{Q}_{1,n} \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} = \sum (Q_{1,n} - i E h C K_{2,n}) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \end{aligned} \right\} (4)$$



注(1) 荷重載荷中 $E h$ が、小さくすると円筒死力の収束は遅くなるが、実際には一一点で載荷されるのではなく、 $E h$ は有限の巾を持ち、実際に用いられる s の範囲において十分収束する解が得られる。

式(3),(4)より複素境界量は次式で与えられる ($n \geq 2$ の場合について)

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_{1,n}(\xi) \\ \tilde{T}_{1,n}(\xi) \\ \tilde{S}_n(\xi) \\ \tilde{Q}_{1,n}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & E(\xi) & 0 \\ \hline \beta & -\beta & 0 & E(\xi_2 - \xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_n \\ \tilde{B}_n \\ \tilde{C}_n \\ \tilde{D}_n \end{bmatrix} \quad (5.a)$$

$$E(\xi) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 \xi} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2 \xi} \end{bmatrix} \quad (5.b)$$

$$E(\xi_2 - \xi) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_1(\xi_2 - \xi)} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2(\xi_2 - \xi)} \end{bmatrix}$$

次に特解 $\tilde{T}^*$ に対応する解は、複素境界量式(5)の形で表わされることを利用して求めることができる。
荷重作用断面近傍の特解による複素境界量を次式で表わす

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_{1,n}^*(\xi) \\ \tilde{T}_{1,n}^*(\xi) \\ \tilde{S}_n^*(\xi) \\ \tilde{Q}_{1,n}^*(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & E_1(\xi-t) & 0 \\ \hline \beta & -\beta & 0 & E_2(\xi-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_n^* \\ \tilde{B}_n^* \\ \tilde{C}_n^* \\ \tilde{D}_n^* \end{bmatrix} \quad (6.a)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi > t \text{ のとき } \tilde{C}_n^* &= \tilde{D}_n^* = 0 \\ \xi \leq t \text{ のとき } \tilde{A}_n^* &= \tilde{B}_n^* = 0 \\ E_1(\xi-t) &= E(t-\xi) \\ E_2(\xi-t) &= E(\xi-t) \end{aligned} \right\} \quad (6.b)$$

ここで複素定数 $\tilde{A}_n^*, \tilde{B}_n^*, \tilde{C}_n^*, \tilde{D}_n^*$ は、荷重作用断面における複素接合条件より次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_n^* \\ \tilde{B}_n^* \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \beta^{-1} \begin{bmatrix} P_{2,n} \\ P_{1,n} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \alpha^{-1} \begin{bmatrix} M_{1,n} \\ P_{1,n} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{C}_n^* \\ \tilde{D}_n^* \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \beta^{-1} \begin{bmatrix} P_{2,n} \\ P_{1,n} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \alpha^{-1} \begin{bmatrix} M_{1,n} \\ P_{1,n} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$n=0, 1$ の場合についても同様にし解を得ることができ、これより円筒に対する特解(荷重作用断面近傍の撓み歪力)は無限長円筒の解として定めることができる。

次に、はり理論に対応する解は transfer matrix 法を用いて 3次元荷重の作用する場合に対してい得ることができ、

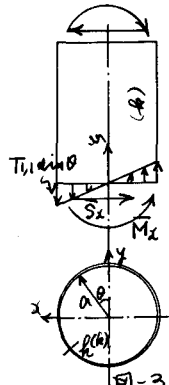
$$n=1 \text{ のとき } y^{(k)}(0) = U^{(k)} \parallel^{(k-1)} \dots \parallel^{(1)} y^{(k)}(0), \quad U^{(k)} = U^{(k)} F(\xi_2)^{(k)} \quad (8)$$

ここで $F(\xi)^{(k)}$, $U^{(k)}$ はそれぞれ transfer matrix および Point matrix である。

$$y(\xi)^{(k)} = \{ \bar{w}(\xi), \alpha \bar{\varphi}(\xi), \bar{M}(\xi)/\alpha^2 \pi, \bar{S}(\xi)/\alpha \pi, 1 \}^T$$

$$F(\xi)^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2/2 & -2\alpha H(\xi) \xi + \frac{\xi^3}{6} & \xi \\ 0 & 1 & \xi & \xi^2/2 & d\xi/d\xi \\ 0 & 0 & 1 & \xi & d^2\xi/d\xi^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d^3\xi/d\xi^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U^{(k)} = \begin{bmatrix} h^{(k+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^{(k+1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{M}^{(k)}/\alpha^2 \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{P}^{(k)}/\alpha \pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$w = \frac{a}{Eh} \bar{w} \quad \text{--- たわみ}$$

$$\varphi = \frac{a}{Eh} \bar{\varphi} \quad \text{--- たわみ角}$$

$$\bar{M} \quad \text{--- はりの曲げモーメント}$$

$$\bar{S} \quad \text{--- せん断力}$$

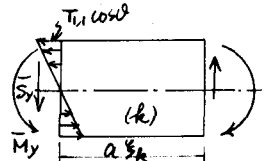


図-3

ここで $\bar{P}$ はウラソフの初期バウ-X-法より得られる影響関数である。以上より、はり理論に対応する解は撓み歪力と時刻に柱目に定めることができる。

$n=0$ の場合に対する、はり理論に対応する解も同様にし得ることができ、

これより式(3)における一般解において、特解 $\tilde{T}^*$ およびはり理論に対応する解が決定され、同次解である境界撓み歪力の中に入力された複素定数 $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n$ は式(5), (6), (8)を用いることにより、接合条件、境界条件から定めることができる。

3. あとがき 円筒軸方向に荷重が分布する場合に、式(6.b)の $E_1(\xi-t), E_2(\xi-t)$ をこれに用いて積分することにより解が得られる。こうして任意の線荷重、面荷重が作用する場合の円筒シェルの解を得ることができ、