

石橋重工務 正員 ○ 名取悦朗
 東大大学院 学生員 倉方慶大
 東大工学部 正員 西野文雄

1. まえがき 構造物に用いられている柱やはりなどの単一材では、曲げせん断やそり拘束ねじりモーメントによるせん断変形は小さいとして無視し、サンブナンのねじりによるもののみが考慮されている。サンブナンのねじりによるせん断ひずみのみを考慮した変位場に基礎を置くと、箱桁のような閉断面部材では応力などにおいて不合理の生ずることがある。このため何らかの方法で、曲げせん断やそり拘束ねじりによるせん断変形を考慮した研究が行なわれている。これらの中で変位場に基礎を置き仮想仕事の原理からつり合い方程式を導いているものに Vlasov¹⁾ や Kollbrunner²⁾ の研究があるが、これらは変位を仮定することから出発しているわけで、ひずみを含めた変位場に対する物理的背景が必ずしも明らかにされていない。ここではひずみに対する吟味に重点を置き、そのひずみから求めた変位場について比較検討する。基本的な仮定は (1) 板厚は変化しない。板厚中心線は伸び縮みしない。断面内において板厚中心線に垂直な線素は、変形後も板厚中心線に対して垂直である。(2) 部材の軸に平行な面内にせん断応力が存在すると、この応力によるせん断ひずみを、曲げせん断を受ける場合の Timoshenko-Beam で考えられているせん断ひずみに対する仮定を拡張した形で考慮する。の2つである。

2. ひずみと変位の関係

右手系の (S, n, z) 座標で表わした微小変位理論によるひずみと変位の関係は次のように書かれる。

$$\epsilon_s = \frac{\partial \xi}{\partial S}, \quad \epsilon_n = \frac{\partial \eta}{\partial n}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{sn} = \frac{\partial \eta}{\partial S} + \frac{\partial \xi}{\partial n}, \quad \gamma_{nz} = \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \gamma_{sz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial S} \quad (1a-f)$$

ここに ξ, η, w はそれぞれ S, n, z 方向への変位である。

仮定 (1) を数式で表わすとひずみに関して

$$\epsilon_n = 0, \quad (\epsilon_s)_{n=0} = 0, \quad \gamma_{sn} = 0 \quad (2a-c)$$

と書くことができる。式 (1) を式 (2) に代入して積分することにより、変位 ξ と η と (S, n, z) 座標の関数関係が次ように求まる。

$$\eta = \eta(S, z), \quad \xi = -n \frac{\partial \eta}{\partial S} + \xi_0(S, z), \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial S} = 0 \quad (3a-c)$$

断面の変位を圆心の x, y 方向への変位 u_s, v_s 剛体回転角 φ および図2に示す角変位 ψ で表わされた断面変形量で表わすと、これらの変位 ξ, η との間には次の関係がある。

$$\xi = l u_s + m v_s + \int_0^S \varphi + \left\{ \int_0^S l^2 - 2n(l^2 - m^2) - n\alpha \right\} \psi \quad (4a, b)$$

$$\eta = -m u_s + l v_s + \int_0^S n \varphi + (\int_0^S n + \alpha) \psi$$

l, m は方向余弦であり $l = \cos(S, x), m = \cos(S, y)$ (5)

$$\int_0^S = x m - y l, \quad \int_0^S l = x m + y l, \quad \int_0^S n = x l + y m, \quad \int_0^S n = x l - y m \quad (6)$$

α は S のみの関数で、長方形断面を構成する板の厚みが再帰間に変化しないときには次のように表わされる。式 (4) の $\cdot$ は S に関する微分を表わす。

$$\alpha(S) = \left\{ \frac{J_2}{k(bJ_1 + kJ_2)} (S_1^3 - k^2 S_1) - \frac{J_1}{b(bJ_1 + kJ_2)} \{ (b - S_2)^3 - b^2(b - S_2) \} \right\} \quad (7)$$

$$J_1 = t_1^3/12, \quad J_2 = t_2^3/12 \quad (8a, b)$$

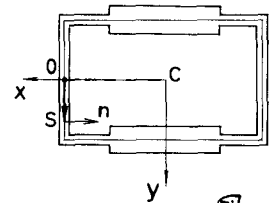


図-1

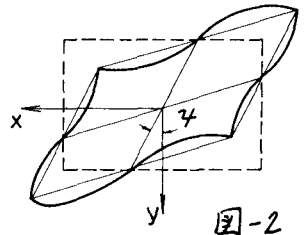


図-2

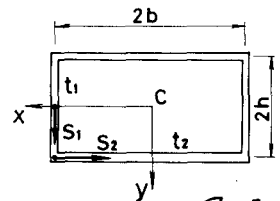


図-3

x, y 方向への変位 u, v と変位 ξ, η の間には $u = l\xi - m\eta, v = m\xi + l\eta$ の関係があるので

$$u = u_s - y\varphi + y\psi - (m\alpha + l n \dot{\alpha} + 2l n) \psi \quad (9a, b)$$

$$v = v_s + x\varphi + x\psi + (l\alpha - m n \dot{\alpha} + 2m n) \psi$$

曲げとねじりモーメントを受ける薄肉棒部材の理論では、オイラー・ベルヌーイの仮定は S 平面、 n 平面内のせん断ひずみ r_{sz}, r_{nz} を用いて次のように表わされる。³⁾

$$r_{sz} = g_A / (G t), \quad r_{nz} = 0 \quad (10a, b)$$

ここに $g_A = (I_{sz} x)_{S=S_A}$ であり、 S_A は開断面部に対して任意に選んだ点の S 座標である。式 (10) では曲げせん断、とり拘束ねじり、断面変形などにもなうせん断応力によるせん断ひずみは考慮されていない。これらによるせん断変形を考えると一般的には変位量に変化する。微小区間 dz 離れた 2 つの断面の任意の 1 点に注目する。せん断変形量を定義するため、考えている点は便宜的に z 軸に垂直に変位するものとする。このとき dz だけ離れた 2 点に生ずる相対変位は $(w^s)' = 0, (u^s)', (v^s)', (\varphi^s)', (\psi^s)'$ と表わされる。ここに上肩つきの S は変位成分のうち、せん断変形のみによる量を表わし、プライムは z に関する微分を示している。 S 平面、 n 平面に生ずるせん断ひずみはこの相対変位と式 (10) から次のように表わされる。

$$r_{sz} = g_A / (G t) + l(u^s)' + m(v^s)' + \int_S (\varphi^s)' + \int_{S_1} (\psi^s)' \quad (11a, b)$$

$$r_{nz} = -m(u^s)' + l(v^s)' + \int_n (\varphi^s)' + (\int_{n_1} + \alpha) (\psi^s)'$$

一般には $u^s, v^s, \varphi^s, \psi^s$ は S, n, z の関数であり、その値は断面内の位置によって変化する。平面保持の仮定のもとでせん断変形を考えた Timoshenko-Beam の理論では $(u^s)', (v^s)'$ を z のみの関数とし、断面内では変化しないと仮定している。ここではこの平面保持の仮定を拡張し、せん断変形にもなうねじり変位 φ^s , 断面変形にもなう変位 ψ^s も z のみの関数であると仮定する。これがひずみ端に対する 2 番目の仮定であり、せん断ひずみに関連した量であるので r の文字を用いて式 (11) に代入する。

$$(u^s)' = r_{xc}(z), (v^s)' = r_{yc}(z), (\varphi^s)' = r_{\varphi c}(z), (\psi^s)' = r_{\psi c}(z) \quad (12a-d)$$

$$r_{sz} = g_A / (G t) + l r_{xc} + m r_{yc} + \int_S r_{\varphi c} + \int_{S_1} r_{\psi c} \quad (13a, b)$$

$$r_{nz} = -m r_{xc} + l r_{yc} + \int_n r_{\varphi c} + (\int_{n_1} + \alpha) r_{\psi c}$$

式 (1f) に式 (4a) と式 (13a) を代入し積分すると、 $n = 0$ である中心線上の変位 w が次のように表わされる。

$$w^* = C(z) - (x - x_0)(u_s' - r_{xc}) - (y - y_0)(v_s' - r_{yc}) - (\varphi' - r_{\varphi c}) \int_0^z (\int_S - g_A / (G t)) ds - (\psi' - r_{\psi c}) \int_0^z \int_{S_1} ds \quad (14)$$

ここに $C(z)$ は積分定数であり、 x_0 と y_0 は任意に選んだ S 座標の原点 O の x, y 座標である。未知のせん断流 g_A は変位 w の閉区間での連続条件 $w(s) = w(s + \oint ds)$ から決まり $g_A = \oint (\varphi' - r_{\varphi c}) \oint ds ds / \oint y/t ds$ (15)

式 (1e) に式 (13b) と式 (4b) を代入し積分すると

$$w = w^* + n \{ m(u_s' - r_{xc}) - l(v_s' - r_{yc}) - \int_n (\varphi' - r_{\varphi c}) - (\int_{n_1} + \alpha) (\psi' - r_{\psi c}) \} \quad (16)$$

ここに w^* は積分定数であり、 $(S, n=0, z)$ での変位を表わす。式 (16) に式 (14) と式 (15) を代入すると

$$w = C(z) - (x - x_0)(u_s' - r_{xc}) - (y - y_0)(v_s' - r_{yc}) - (\Omega + \int_n n (\varphi' - r_{\varphi c}) - \{ \Omega_1 + (\int_{n_1} + \alpha) n \} (\psi' - r_{\psi c}) \quad (17)$$

$$\text{ここに } \Omega = \int_0^z \left\{ \int_S - \oint ds ds / (t \oint y/t ds) \right\} ds, \quad \Omega_1 = \int_0^z \int_{S_1} ds \quad (18a, b)$$

x, y 座標の原点 O を長方形断面の図心に選んでいるので、薄肉断面上にない点 C の変位は式 (17) では表わすことができない。ここでは便宜上、式 (17) の積分定数 $C(z)$ を原点 C の変位を用いて表わすために、原点 C と S 座標の原点 O の間を仮想の板厚 ($t=0$) の薄板で結ぶ。この結果原点 C の z 軸方向の変位が定義できるようになる。仮想板に沿って定義される原点 C の S 座標を S_c と表わし $\Omega_c = \int_0^{S_c} \int_S ds ds, \int_0^{S_c} \int_{S_1} ds = -x_0 y_0$ (19a, b) となることに注意すれば、積分定数 $C(z)$ は原点 C の z 方向変位 w_c を用いて次のように表わされる。

$$C(z) = w_c - x_0(u_s' - r_{xc}) - y_0(v_s' - r_{yc}) + \Omega_c(\varphi' - r_{\varphi c}) - x_0 y_0(\psi' - r_{\psi c}) \quad (20)$$

式 (20) を式 (17) に代入すると、式 (13) で表わされるひずみ端の仮定を満たす z 方向変位 w として次式を得る。

$$w = w_c - x\lambda - y\mu - w_0\beta - w_1\kappa \quad (21)$$

$\lambda = u'_s - r_{xc}$, $\mu = v'_s - r_{yc}$, $\varphi = \varphi' - r_{\varphi c}$, $K = \psi' - r_{\psi c}$
 $\omega = \Omega + \int_{s_1}^s n - \Omega_c$, $\omega_1 = \Omega_1 + (\int_{s_1}^s n + \alpha)n + x_0 y_0$ (22a-f)
 式(4)と式(21)を式(1)に代入する。ひずみの6成分のうち ϵ_n と r_{sn} は式(2a,c)により零である。

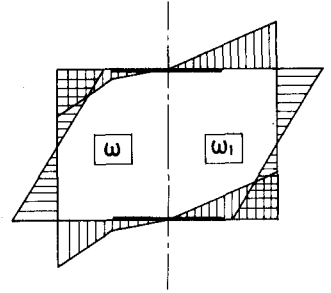


図-4

$$\begin{aligned}
 \epsilon_s &= -n \alpha \psi \\
 \epsilon_z &= w'_c - x \lambda' - y \mu' - \omega \varphi' - \omega_1 K' \\
 r_{xz} &= -m(u'_s - \lambda) + l(v'_s - \mu) + \int_{s_1}^s (\varphi' - \varphi) + \int_{s_1}^s (\psi' - K) \\
 r_{sz} &= l(u'_s - \lambda) + m(v'_s - \mu) + (\int_{s_1}^s \varphi' - \varphi) + \int_{s_1}^s \psi' \\
 &\quad + \int_{s_1}^s (\psi' - K) + \int_{s_1}^s K - n \alpha (\psi' + K)
 \end{aligned} \quad (23a-d)$$

$$\Theta = \frac{1}{\pi} \frac{\int_{s_1}^s ds}{\int_{s_1}^s ds} - 2n, \quad \Theta_1 = 2n(m^2 - l^2) \quad (24a, b)$$

3. つり合い方程式

部材に分布して作用する外力(体積力)と両端に作用する表面力を受け、空間でつり合っている直線材を考え、仮想仕事の原理は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 &\int_{z_1}^{z_2} \int_A [\sigma_s \delta \epsilon_s + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xz} \delta r_{xz} + \tau_{sz} \delta r_{sz}] dA dz \\
 &= \int_{z_1}^{z_2} \int_A [q_{xd} \delta u + q_{yd} \delta v + q_{zd} \delta w] dA dz + \left[(\bar{\sigma}_z \delta w + \bar{\tau}_{sz} \delta \eta + \bar{\tau}_{xz} \delta \eta) dA \right]_{z_1}^{z_2} \quad (25)
 \end{aligned}$$

q_{xd} , q_{yd} および q_{zd} はそれぞれ x , y , z 方向に単位体積当りに作用する分布外力であり、 $\bar{\sigma}_z$, $\bar{\tau}_{sz}$, $\bar{\tau}_{xz}$ は両端断面での z , s , n 方向への表面力である。式(25)に式(4)(9)(21)および(23)を代入し部分積分することにより、次のつり合い方程式が求まる。

$$\begin{aligned}
 N' + q_z &= 0, \quad -M'_x + V_x - m_x = 0, \quad V'_x + q_x = 0, \quad -M'_y + V_y - m_y = 0 \\
 V'_y + q_y &= 0, \quad -M'_\varphi + T_\omega - m_\varphi = 0, \quad T'_\omega + m_\omega = 0, \quad -M'_\psi + T_0 + T_2 - m_\psi = 0 \\
 T'_Q + M_0 - T'_2 + m_Q &= 0
 \end{aligned} \quad (26a-d)$$

二に

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_z dA, \quad M_x = \int_A \sigma_z x dA, \quad M_y = \int_A \sigma_z y dA, \quad M_\varphi = \int_A \sigma_z \omega dA, \quad M_\psi = \int_A \sigma_z \omega_1 dA \\
 V_x &= \int_A (\tau_{xz} l - \tau_{xz} m) dA, \quad V_y = \int_A (\tau_{xz} m + \tau_{xz} l) dA, \quad T = \int_A (\tau_{sz} \int_{s_1}^s + \tau_{xz} \int_{s_1}^s) dA, \quad T_s = \int_A \tau_{sz} \Theta dA \\
 T_\omega &= T - T_s, \quad T_Q = \int_A (\tau_{sz} \int_{s_1}^s + \tau_{xz} \int_{s_1}^s) dA, \quad T_1 = \int_A \tau_{sz} \Theta_1 dA, \quad T_0 = T_Q - T_1, \quad T_2 = \int_A \tau_{sz} n \alpha dA \\
 M_0 &= \int_A \tau_{sz} s n \alpha dA, \quad q_x = \int_A q_{xd} dA, \quad q_y = \int_A q_{yd} dA, \quad q_z = \int_A q_{zd} dA, \quad m_x = \int_A q_{zd} x dA \\
 m_y &= \int_A q_{zd} y dA, \quad m_\varphi = \int_A q_{zd} \omega dA, \quad m_\psi = \int_A q_{zd} \omega_1 dA, \quad m_\omega = \int_A (q_{yd} x - q_{xd} y) dA \\
 m_Q &= \int_A \{ q_{yd} (x + l \alpha - m n \alpha + 2 m n) + q_{xd} (y - m \alpha - l n \alpha + 2 l n) \} dA
 \end{aligned} \quad (27a-x)$$

4. 結語

ひずみ場の仮定に関して他の研究との比較をすると、Vlasov は式(13a)においてリンダンのねじりに相当する $q_A/(Gx)$ を、また Kollbrunner は曲げせん断の項 $l r_{xc} + m r_{yc}$ と断面変形に関連するせん断ひずみの項 $\int_{s_1}^s r_{\varphi c}$ を無視していることになる。次に軸方向変位 w を検討してみると、たとえば長方形断面を構成する板の厚さが両縁間で変化する場合には、式(21)の ω と ω_1 は図4のように差が現われる。Vlasov は ω_1 のみを、また Kollbrunner は ω のみを採っている。

5. 参考文献

- 1) Vlasov, V. Z.: Thin Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translation, 1961.
- 2) Kollbrunner, C. F. und N. Hajdin: Dünnwandige Stäbe, Springer-Verlag, 1972.
- 3) 西野・倉方ほか: 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, 225号, 1974.