I-40　弾性床上の桁の剛性マトリックス解析法について

北海道大学工学部　正員　渡辺　昇
函館工業高等専門学校　正員　三浦　登
岩手大学工学部　正員　○宮本　裕

1．弾性床上の桁の剛性マトリックスを Anfang parameter法により誘導した。この剛性マトリックスを用いて変形法により弾性床上の桁の構造解析を行ったものである。この応用として弾性床上の連続桁や基礎の弾性変形を考慮したラーメンの解析などが考えられる。

2．弾性床上の桁の剛性マトリックスの誘導

図-1のような弾性床上の桁に分布荷重pが作用するときの桁の微分方程式は　$EIy'''' + ky = p$　となるが，剛性マトリックスではlの区間に荷重が無いので次式となる。

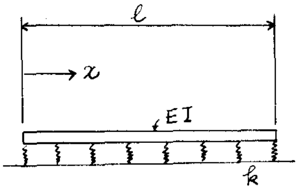

図-1

$$EIy'''' + ky = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

いま $\beta^4 = \dfrac{k}{4EI}$ とおくと　$y'''' + 4\beta^4 y = 0 \quad \cdots\cdots \quad (2)$ となり，

この解はつぎのようになる。

$$y(x) = C_1 \sin\beta x\, sh\beta x + C_2 \cos\beta x\, sh\beta x + C_3 \sin\beta x\, ch\beta x + C_4 \cos\beta x\, ch\beta x\,, \quad \cdots \quad (3)$$

したがって

$$y'(x) = \beta\{C_1(\sin\beta x\, ch\beta x + \cos\beta x\, sh\beta x) + C_2(\cos\beta x\, ch\beta x - \sin\beta x\, sh\beta x) + C_3(\sin\beta x\, sh\beta x + \cos\beta x\, ch\beta x) + C_4(\cos\beta x\, sh\beta x - \sin\beta x\, ch\beta x)\}\,, \quad \cdots \quad (4)$$

$$y''(x) = 2\beta^2(C_1 \cos\beta x\, ch\beta x - C_2 \sin\beta x\, ch\beta x + C_3 \cos\beta x\, sh\beta x - C_4 \sin\beta x\, sh\beta x)\,, \quad \cdots \quad (5)$$

$$y'''(x) = 2\beta^3\{C_1(\cos\beta x\, sh\beta x - \sin\beta x\, ch\beta x) - C_2(\sin\beta x\, sh\beta x + \cos\beta x\, ch\beta x) + C_3(\cos\beta x\, ch\beta x - \sin\beta x\, sh\beta x) - C_4(\sin\beta x\, ch\beta x + \cos\beta x\, sh\beta x)\}\,, \quad \cdots \quad (6)$$

$$y''''(x) = 4\beta^4(-C_1 \sin\beta x\, sh\beta x - C_2 \cos\beta x\, sh\beta x - C_3 \sin\beta x\, ch\beta x - C_4 \cos\beta x\, ch\beta x)\,. \quad \cdots \quad (7)$$

したがって

$$M(x) = -EIy''(x) = -EI\cdot 2\beta^2(C_1 \cos\beta x\, ch\beta x - C_2 \sin\beta x\, ch\beta x + C_3 \cos\beta x\, sh\beta x - C_4 \sin\beta x\, sh\beta x)\,, \quad \cdots \quad (8)$$

$$Q(x) = -EIy'''(x) = -EI\cdot 2\beta^3\{C_1(\cos\beta x\, sh\beta x - \sin\beta x\, ch\beta x) - C_2(\sin\beta x\, sh\beta x + \cos\beta x\, ch\beta x) + C_3(\cos\beta x\, ch\beta x - \sin\beta x\, sh\beta x) - C_4(\sin\beta x\, ch\beta x + \cos\beta x\, sh\beta x)\}\,. \quad \cdots \quad (9)$$

境界条件 $y(0)$, $y'(0)$, $M(0)$, $Q(0)$ を与えて C_1, C_2, C_3, C_4 を求めるとつぎのようになる。

$$y(0) = C_4\,, \quad y'(0) = \beta(C_2 + C_3)\,, \quad M(0) = -EI\cdot 2\beta^2\cdot C_1\,, \quad Q(0) = -EI\cdot 2\beta^3(-C_2 + C_3)$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ C_1 &= -\frac{M(0)}{EI\cdot 2\beta^2}\,, \quad C_2 = \frac{y'(0)}{2\beta} + \frac{Q(0)}{EI\cdot 4\beta^3}\,, \\ C_3 &= \frac{y'(0)}{2\beta} - \frac{Q(0)}{EI\cdot 4\beta^3}\,, \quad C_4 = y(0) \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (10)$$

式(10)を式(3),(4),(8),(9)に代入すると結局 $y(x)$, $y'(x)$, $\dfrac{M(x)}{EI}$, $\dfrac{Q(x)}{EI}$ が求められる。

それらの式に $x = l$ を代入するとつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} y(l) \\ y'(l) \\ \dfrac{M(l)}{EI} \\ \dfrac{Q(l)}{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \dfrac{M(0)}{EI} \\ \dfrac{Q(0)}{EI} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad (11)$$

式(11)は $\delta=\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} \frac{M}{EI} \\ \frac{Q}{EI} \end{bmatrix}$ とおくと，つぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} \delta(l) \\ X(l) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta(0) \\ X(0) \end{bmatrix} \quad \cdots \quad (12)$$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned} \delta(l)&=K_{11}\delta(0)+K_{12}X(0), \\ X(l)&=K_{21}\delta(0)+K_{22}X(0) \end{aligned}\right\} \text{これより} \quad \left.\begin{aligned} &K_{12}^{-1}\{\delta(l)-K_{11}\delta(0)\}=X(0), \\ &X(l)=K_{21}\delta(0)+K_{22}K_{12}^{-1}\{\delta(l)-K_{11}\delta(0)\} \end{aligned}\right\}$$

したがって
$$\left.\begin{aligned} X(0)&=-K_{12}^{-1}K_{11}\delta(0)+K_{12}^{-1}\delta(l), \\ X(l)&=(K_{21}-K_{22}K_{12}^{-1}K_{11})\delta(0)+K_{22}K_{12}^{-1}\delta(l) \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (13)$$

ところが 式(11)よりわかるように $K_{11}=K_{22}$, $K_{12}\times(-4\beta^4)=K_{21}$ であるから，

$$\left.\begin{aligned} X(0)&=-K_{12}^{-1}K_{11}\delta(0)+K_{12}^{-1}\delta(l), \\ X(l)&=\{(-4\beta^4)K_{12}-K_{11}K_{12}^{-1}K_{11}\}\delta(0)+K_{11}K_{12}^{-1}\delta(l) \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (14)$$

すなわち
$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(l) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -K_{12}^{-1}K_{11} & K_{12}^{-1} \\ (-4\beta^4)K_{12}-K_{11}K_{12}^{-1}K_{11} & K_{11}K_{12}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta(0) \\ \delta(l) \end{bmatrix} \quad \cdots \quad (15)$$

行列の各要素について計算するとつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} \frac{M(0)}{EI} \\ \frac{Q(0)}{EI} \\ \frac{M(l)}{EI} \\ \frac{Q(l)}{EI} \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} 2\beta^2(\mathrm{sh}^2\beta l+\sin^2\beta l) & 2\beta(\mathrm{sh}\beta l\,\mathrm{ch}\beta l-\sin\beta l\cos\beta l) & -4\beta^2\sin\beta l\,\mathrm{sh}\beta l & -2\beta(\cos\beta l\,\mathrm{sh}\beta l-\sin\beta l\,\mathrm{ch}\beta l) \\ -4\beta^3(\sin\beta l\cos\beta l+\mathrm{sh}\beta l\,\mathrm{ch}\beta l) & -2\beta^2(\mathrm{sh}^2\beta l+\sin^2\beta l) & 4\beta^3(\sin\beta l\,\mathrm{ch}\beta l+\cos\beta l\,\mathrm{sh}\beta l) & -4\beta^2\sin\beta l\,\mathrm{sh}\beta l \\ -4\beta^2\sin\beta l\,\mathrm{sh}\beta l & 2\beta(\cos\beta l\,\mathrm{sh}\beta l-\sin\beta l\,\mathrm{ch}\beta l) & 2\beta^2(\mathrm{sh}^2\beta l+\sin^2\beta l) & -2\beta(\mathrm{sh}\beta l\,\mathrm{ch}\beta l-\cos\beta l\sin\beta l) \\ -4\beta^3(\sin\beta l\,\mathrm{ch}\beta l+\cos\beta l\,\mathrm{sh}\beta l) & -4\beta^2\sin\beta l\,\mathrm{sh}\beta l & 4\beta^3(\cos\beta l\sin\beta l+\mathrm{ch}\beta l\,\mathrm{sh}\beta l) & -2\beta^2(\mathrm{sh}^2\beta l+\sin^2\beta l) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y(l) \\ y'(l) \end{bmatrix} \quad \cdots \quad (16)$$

ただし $\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2\beta l-\sin^2\beta l}$

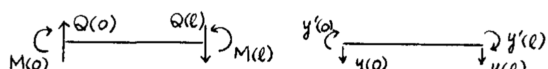

図-2

M，Q，y'，y の符号の定義は図-2のようであるが，変形法による場合は図-3のように直す必要がある。さらに Q，M の順序に改めると結局式(17)を得る。

$$\begin{bmatrix} \frac{Q(0)}{EI} \\ \frac{M(0)}{EI} \\ \frac{Q(l)}{EI} \\ \frac{M(l)}{EI} \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} 4\beta^3(\sin\beta l\cos\beta l+\mathrm{sh}\beta l\,\mathrm{ch}\beta l) & -2\beta^2(\mathrm{sh}^2\beta l+\sin^2\beta l) & -4\beta^3(\sin\beta l\,\mathrm{ch}\beta l+\cos\beta l\,\mathrm{sh}\beta l) & -4\beta^2\sin\beta l\,\mathrm{sh}\beta l \\ -2\beta^2(\mathrm{sh}^2\beta l+\sin^2\beta l) & 2\beta(\mathrm{sh}\beta l\,\mathrm{ch}\beta l-\sin\beta l\cos\beta l) & 4\beta^2\sin\beta l\,\mathrm{sh}\beta l & -2\beta(\cos\beta l\,\mathrm{sh}\beta l-\sin\beta l\,\mathrm{ch}\beta l) \\ -4\beta^3(\sin\beta l\,\mathrm{ch}\beta l+\cos\beta l\,\mathrm{sh}\beta l) & 4\beta^2\sin\beta l\,\mathrm{sh}\beta l & 4\beta^3(\cos\beta l\sin\beta l+\mathrm{ch}\beta l\,\mathrm{sh}\beta l) & 2\beta^2(\mathrm{sh}^2\beta l+\sin^2\beta l) \\ -4\beta^2\sin\beta l\,\mathrm{sh}\beta l & -2\beta(\cos\beta l\,\mathrm{sh}\beta l-\sin\beta l\,\mathrm{ch}\beta l) & 2\beta^2(\mathrm{sh}^2\beta l+\sin^2\beta l) & 2\beta(\mathrm{sh}\beta l\,\mathrm{ch}\beta l-\cos\beta l\sin\beta l) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y(l) \\ y'(l) \end{bmatrix} \quad \cdots \quad (17)$$

ただし $\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2\beta l-\sin^2\beta l}$

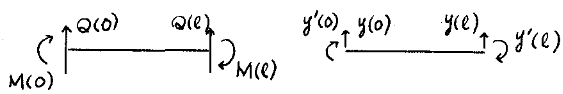

図-3