

1. 要 旨

有限要素法により計算された応力が、節点において、要素毎にかなり異なるのを見ればしばしば戸惑うことがある。本報告はこのような問題を多少なりとも合理的に解決するため、最小自乗法を用いて適正な応力の計算を行う方法について述べ、1～2の計算例を示すものである。なお、この方法は近年J. T. Oden が提案した Consistent Conjugate Stress の計算式と最終的に同一のものになるが、本法の方が比較的簡単に理解でき、実用に供し易いと考えたので報告するものである。

2. 応力計算式の誘導

要素内応力を $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$ とすれば、これは通常次式で計算されている。

$$\{\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}\}^T = [S]\{u\} \quad (1)$$

ここに $[S]$ は応力マトリックス、 $\{u\}$ は要素頂点の変形ベクトルである。このようにして求めた応力は、一般に、隣接要素間で連続しない。そこでここではこの応力を観測値と考え、これに最も良く合いかも要素間で連続するような応力を最小自乗法で求めることにする。この求める要素内応力を $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$ とし、これを次式で近似する。

$$\{\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}\} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \begin{bmatrix} \sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \dots, \tau_{zx1} \\ \sigma_{x2}, \sigma_{y2}, \dots, \tau_{zx2} \\ \vdots \\ \sigma_{xn}, \sigma_{yn}, \dots, \tau_{zxn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここに n は要素の節点数、 $g_1, g_2, \dots, g_n$ は適当な補間関数、 $\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \dots, \tau_{zxn}$ は節点で一意的に定まる未知応力とする。このとき補間関数 $g_1, g_2, \dots, g_n$ に連続性の保証された形状関数を用いれば、要素間で応力を連続させることができる。また(2)式の要素内応力を(1)式に最も良く合わせるためには、両者の誤差の自乗和が構造全体に渡って最小になるよう、未知応力 $\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \dots, \tau_{zxn}$ を定めればよい。そしてこの未知応力が定まれば(2)式より要素内応力は計算できる。そこでまず要素内応力の誤差の自乗和であるが、簡単のため σ_x のみについて計算しすべての要素について加え合わせると、

$$R^2 = \{S_{x1}^T \dots S_{xn}^T\} \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{x1} \\ \vdots \\ S_{xn} \end{bmatrix} - 2 \{S_{x1}^T \dots S_{xn}^T\} \begin{bmatrix} F_{x1} \\ \vdots \\ F_{xn} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \int (\bar{\sigma}_x^T)^2 dV_i \quad (3)$$

ただし $S_{xi}^T = \{\sigma_{xi}^T, \sigma_{yi}^T, \dots, \tau_{zxi}^T\}$

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} \int g_i g_j dV_1 & & 0 \\ & \int g_i g_j dV_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & \int g_i g_j dV_{\bar{m}} \end{bmatrix}, \quad F_{xi} = \begin{bmatrix} \int g_i \bar{\sigma}_x^T dV_1 \\ \int g_i \bar{\sigma}_x^T dV_2 \\ \vdots \\ \int g_i \bar{\sigma}_x^T dV_{\bar{m}} \end{bmatrix}$$

が得られる。上式で $1 \dots \bar{m}$ は要素の番号、 i, j は要素頂点の番号を示す。各要素の i 頂点での σ_x を要素番号順に並べたベクトル $\{S_{xi}\}$ と、各節点での σ_x を節点番号順に並べたベクトル $\{S_{xp}\}$ の間には次の関係がある。

$$\{S_{xi}\} = [\alpha_i]^T \{S_{xp}\} \quad \text{ただし} \quad \{S_{xp}\}^T = \{\sigma_{xp1}, \sigma_{xp2}, \dots, \sigma_{xpl}\} \quad (4)$$

ここに $[\alpha_i]$ は、各要素の i 頂点がどの節点につながっているかを示す行列で「形状行列」と呼ばれるものである。また σ_{xp_i} は i 節点での σ_x 、 i は節点数とする。(4)式を用いて(3)式を書き換えると次式を得る。

$$R^2 = \{S_{xp}\}^T [\alpha_1 \dots \alpha_n] \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix} \{S_{xp}\} - 2 \{S_{xp}\}^T [\alpha_1 \dots \alpha_n] \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ \vdots \\ F_{xn} \end{Bmatrix} + \bar{R}^2 \quad (5)$$

ただし(3)式の最後の項は重要でないで $\bar{R}^2$ と書いた。これで(1)、(2)式でそれぞれ計算される要素内応力 σ_x の全要素についての誤差の自乗和 R^2 が求まった。これを最小にするには(5)式を $\{S_{xp}\}$ の各要素が微分したものを0とあげばよい。結果は次のようになり、Oden が提案した式と一致する。

$$[\alpha_1 \dots \alpha_n] \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{bmatrix} \{S_{xp}\} = [\alpha_1 \dots \alpha_n] \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ \vdots \\ F_{xn} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

これを解いて $\{S_{xp}\}$ を求めれば、節点での適正な応力値が得られる。以上は σ_x についての説明であるが、これを σ_y 、 τ_{yz} と読み換えることによって、他の応力にも適用できる。

3. 計算例と考察

図-1、2に本法による応力の計算結果を、従来の、応力マトリックスによる結果と比較して示す。図-1の適用例の場合は本法を用いることによってかなり精度の良い応力が得られたが、図-2の適用例の場合は必ずしもそうではなく固定端での応力はむしろ応力マトリックスによる結果の方が精が良い。このように、本法を用いることによって部分的にはあるが逆に精度が悪くなることもある。これは本法の応力計算法が、応力マトリックスによる応力を基にして要素間で連続な応力を推定するという方法をとっているの、基になる応力の分布状態の如何によっては、部分的に精度の低下を招くこともあるからである。しかし本法は、応力マトリックスにより既に計算された応力を用いて、要素間での応力の不連続を解消する最適な方法の一つと考えられるので、要素間で応力が著しく異なる場合には本法により応力の修正を行うのも一法であろう。ただし、(応力の数) × (節点数) だけの元数の連立一次方程式は解かねばならない。

参考文献

- 1) 大地羊三, 有限要素法の原理, 森北出版, 近刊
- 2) J.T. Oden & H.J. Braudli, "On the calculation of consistent stress distributions in finite element approximations", Int. J. num. Meth. Engng, Vol 3, PP317-325, (1971)
- 3) J.T. Oden & J.N. Reddy, "Note on an approximate method for computing consistent conjugate stress in elastic finite elements", Int. J. num. Meth. Engng, Vol 6, PP55-61, (1973)
- 4) 大地羊三, 構造解析とコンピュータ, 産業図書, 1971

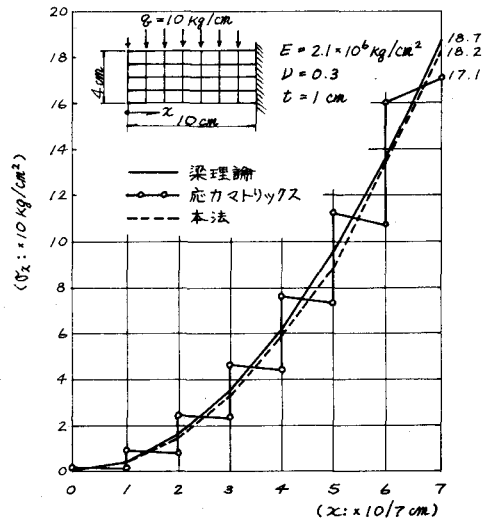


図-1 分布荷重を受ける片持梁下縁の応力

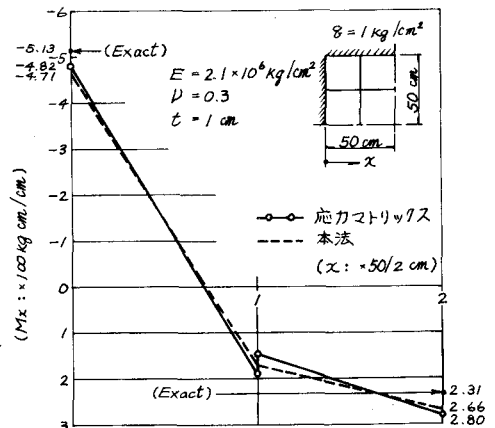


図-2 分布荷重を受ける正方形板の中心線上の曲げモーメント