I-36　「有限変形解析の実験的考察」

日本鋼管　正員　　辻　松雄
〃　　　〃　○石井　紘

1. まえがき

長大構造物においては，荷重と変形，応力との関係が非線形となり，一般に用いられている線形の微小変形理論による計算値は実状に合わない結果を与える。道路橋設計示方書においても，最近の改訂でアーチ系構造の解析に対して，上記の影響を考慮すべきことを規定している。ここに変形を考慮した有限変形理論による構造解析が必要となってくる。マトリックス法による有限変形解析に関しては，数多くの文献[1)~5)]が発表されている。文献はいずれも変形法による解析で，剛性マトリックス中に線形部分と非線形部分を含む，2つのマトリックスを考えて解析を行なっている。一般の骨組構造（アーチ系橋梁など）の有限変形解析を行なう場合は1次の非線形剛性マトリックス[1)]を使用するだけで十分な精度を有し解析できるが，ケーブルを含む構造，および座屈などの大変形を伴う場合，1次の非線形剛性マトリックスを考えるだけでは，良い精度が得られない。これに対しては，2次，更に3次の非線形剛性マトリックスを考えると良いのであろうが，これらの非線形マトリックスを求めるには，やっかいな準備計算を行なわなければならない。ここでは計算方法を工夫することにより，1次の非線形剛性マトリックスだけを用いて，上記の大変形解析を行なってみた。更に本法による解析法は，どの程度の正確さを有しているか，模型実験により確かめたので，ここに報告する。

2. 解　析

骨組構造の有限変形解析を行なう場合は，微小変形解析と同様(1)式を解くと良い。しかし微小変形解析と異なる点は剛性マトリックス$[K]$中に非線形剛性マトリックス$[K_G]$を含んでいることである。

$$\{P\} = [K]\cdot\{x\} \tag{1}$$

$\{P\}$：節点荷重ベクトル

$\{x\}$：節点変位ベクトル

$[K]$：剛性マトリックス（$[K]=[K_E]+[K_G]$）

但し　$[K_E]$：線形剛性マトリックス

$[K_G]$：非線形剛性マトリックス

表－1　1次非線形剛性マトリックス

端部結合条件	$[K_G]$マトリックス（非線形マトリックス）	端部結合条件	$[K_G]$マトリックス（非線形マトリックス）
i，j端 剛結合	$\frac{N}{\ell}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & \frac{\ell}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{\ell}{10} \\ & & \frac{2\ell^2}{15} & 0 & -\frac{\ell}{10} & -\frac{\ell^2}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \mathrm{Sym} & & & \frac{6}{5} & -\frac{\ell^2}{10} \\ & & & & & \frac{2\ell^2}{15} \end{bmatrix}$	i，端ピン j，端剛 結合	$\frac{N}{\ell}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{\ell}{5} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \mathrm{Sym} & & & \frac{6}{5} & -\frac{\ell}{5} \\ & & & & & \frac{\ell^2}{5} \end{bmatrix}$
i，j端 ピン結合	$\frac{N}{\ell}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \mathrm{Sym} & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$	i，端剛 j，端ピン 結合	$\frac{N}{\ell}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & \frac{\ell}{5} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 \\ & & \frac{\ell^2}{5} & 0 & -\frac{\ell}{5} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \mathrm{Sym} & & & \frac{6}{5} & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$

表－1に1次非線形剛性マトリックスを一般の平面骨組構造に適用できる形式で示す。

表－1に示すママトリックスを使用することにより，骨組構造の有限変形解析を行なうことができるが，構造物が大変形をする場合は，表－1のマトリックスを使用し，(1)式を解いても，精度良い結果が得られない。しかし次に示す計算手順に従い解析を行なうと，良い結果が得られることが解った。

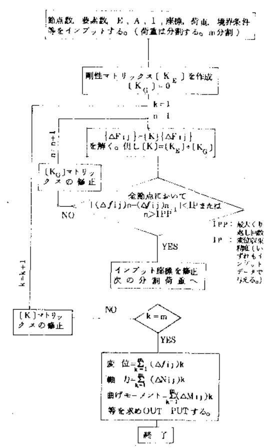
a)　外力を分割して載荷する。

b)　最初に分割された外力に対し，(1)式を解く。

c)　得られる変位より，入力されている座標値を修正する。

d)　修正された座標，および計算されている軸力をもとに$[K]$マトリックスを修正する。

e)　分割した次の荷重に対し，修正された剛性マトリックス$[K]$を使用し(1)式を解く。



図－1　大変形解析フロチャート

分割されている全ての荷重に対して(b)～(e)の手順をくり返す。図－1にその解析フローチャートを示す。

3. 実　験

上記解析の検証を行なうため，図－2に示すケーブルを使用し，載荷実験を行なった。

1）模　型

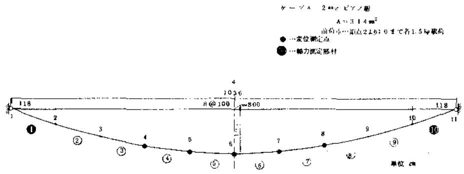
φ2㎜のピアノ線をケーブルとし，スパン10m，サグ1m，に張り渡し，前荷重として，スパンを10等分した各点に1.5Kgの錘りを載荷しておき，その状態より実験を始める。

2）載荷ケースおよび計測個所

実験はⅠ～Ⅳまでの4ケースを行なう。載荷は4ケース共，荷重の大きさが，20～30Kg程度であるから「錘り」を利用した。各ケースにおける計測個所は図－2，表－2に示す。また計測方法として，変位の場合は，節点に取りつけた指標により載荷前後の位置を節点背面に固定した方眼紙をスケールとして，水平，鉛直変位を同時に読み取った。軸力はあらかじめキャリブレーションしてあるロードセルを挿入して測定した。

3）結果と考察

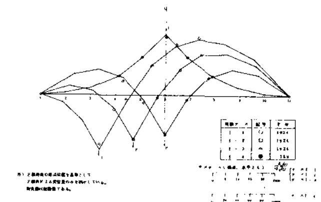
図－3はケースⅠ～Ⅳまでの最終荷重Pに対する模型全体の変位図で，いずれのケースも実験値と理論値は良く一致している。図－4はケースⅠ,Ⅱ,Ⅳの場合の荷重と，変位の関係を示す。ケーブル特有の非線形性を示しながらも，実験値と理論値は良く一致している。図－5はケースⅠ,Ⅱ,Ⅳの場合の荷重と軸力の関係を示す。Ⅰ,Ⅱは実験値と理論値が良く一致したが，Ⅴは変位が大きくなっていくに従い，差が生じてきている。これは軸力計測治具がこのような著るしい変形に対応できなかったものと思われる。また荷重と軸力は変形が大きくなっても，ほぼ直線的な関係を示している。



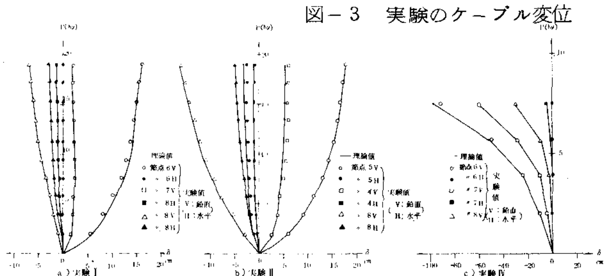
図－2　模型一般図

表－2 載荷ケースおよび測定個所

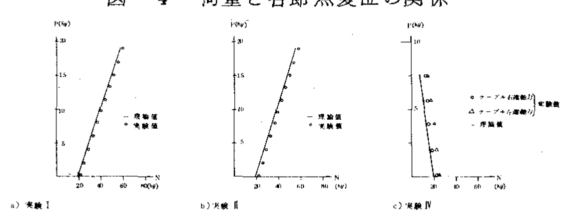
ケース	載荷状態	変位測定	軸力測定
Ⅰ	節点6に下向き載荷 2.1～19.24Kg(10分割)	No.4,5,6 7,8節点 変位計測 (鉛直 水平 方向共)	No.①⑩部材の軸力計測 (ケーブル両端)
Ⅱ	節点5に下向き載荷 2.1～19.24Kg(10分割)		
Ⅲ	節点4に下向き載荷 2.1～19.24Kg(10分割)		
Ⅳ	節点6に下向き載荷 2.1～7.59Kg(4分割)		



図－3　実験のケーブル変位



図－4　荷重と各節点変位の関係



図－5　荷重と軸力の関係

4. 結　語

一般の骨組構造の有限変形解析を行なう場合は，表－1に示す1次非線形剛性マトリックスを使用し，普通の変形法の手順に従い解析すれば良い。変形が著るしい構造の場合でも，2. に示す手順に従って解析を行なうと，かなり良い精度で計算できる。また表－1次非線形剛性マトリックスは，有限変形解析ばかりでなく座屈解析，振動解析（いずれも固有値解析）を行なう場合にも，非常に有効なマトリックスとなる。
尚，実験は上記した他，構造系の違ったケースについても行なったが紙面の都合上省略する。

1）JS・シェムニスキー「マトリックス構造解析の基礎理論」培風館
2）堀井・川原「骨組構造の大変形解析」論文集 1971 No.191
3）前田・林・中村「増分法による平面・骨組の大変形解析の加速計算法」論文集 1974 No.223
4）後藤「有限変形に関する2・3の考察」論文集 No.163 1969
5）S・A・Saafan「Theoretical Analysis of Suspension Bridges」ASCE 1966 August T4