I-32　有限変位弾性論へのマトリックスの応用について

福岡大学　正員　黒木健実

§1. まえがき

さきに，マトリックスの応用として，微小変位弾性問題の基礎方程式をマトリックスで表わし，有限要素法の基礎になる変分原理が簡潔に説明できることを示した[1)]。今回は同様の手法で，直角座標系を用いた有限変位弾性論[2),3)]の定式化を試みた。

§2. 記号

V：弾性体の内部	x, y, z：直角座標	$\boldsymbol{\sigma}$：応力ベクトル
S：境界面	u, v, w：変位	$\mathbf{U}$：変位 〃
S_σ：力が与えられている境界	F_x, F_y, F_z：物体力	$\mathbf{F}$：物体力 〃
S_u：変位が拘束されている境界	T_x, T_y, T_z：境界の力	$\mathbf{T}$：外力 〃
$D_x=\partial/\partial x$， $D_y=\partial/\partial y$， $D_z=\partial/\partial z$		$\boldsymbol{\varepsilon}$：ひずみ 〃
		l, m, n：方向余弦

§3. ひずみ$\boldsymbol{\varepsilon}$と変位$\mathbf{U}$の関係式

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\partial u/\partial x+(\partial u/\partial x)^2/2+(\partial v/\partial x)^2/2+(\partial w/\partial x)^2/2\\ \partial v/\partial y+(\partial u/\partial y)^2/2+(\partial v/\partial y)^2/2+(\partial w/\partial y)^2/2\\ \partial w/\partial z+(\partial u/\partial z)^2/2+(\partial v/\partial z)^2/2+(\partial w/\partial z)^2/2\\ \partial v/\partial x+\partial u/\partial y+\partial u/\partial x\cdot\partial u/\partial y+\partial v/\partial x\cdot\partial v/\partial y+\partial w/\partial x\cdot\partial w/\partial y\\ \partial w/\partial y+\partial v/\partial z+\partial u/\partial y\cdot\partial u/\partial z+\partial v/\partial y\cdot\partial v/\partial z+\partial w/\partial y\cdot\partial w/\partial z\\ \partial u/\partial z+\partial w/\partial x+\partial u/\partial z\cdot\partial u/\partial x+\partial v/\partial z\cdot\partial v/\partial x+\partial w/\partial z\cdot\partial w/\partial x\end{Bmatrix}\Longrightarrow\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\left(\mathbf{D}_L+\tfrac{1}{2}\mathbf{D}_{N_1}\right)^T\mathbf{U}\quad\cdots\cdots(1)$$

ここで添字Tは転置マトリックスを意味し，$\mathbf{D}_L$，$\mathbf{D}_{N_1}$はつぎの内容をもつ。

$$\mathbf{D}_L=\begin{bmatrix}D_x&0&0&D_y&0&D_z\\0&D_y&0&D_x&D_z&0\\0&0&D_z&0&D_y&D_x\end{bmatrix}\qquad \mathbf{D}_{N_1}=\begin{bmatrix}D_xuD_x&D_yuD_y&D_zuD_z&D_yuD_x+D_xuD_y&D_zuD_y+D_yuD_z&D_xuD_z+D_zuD_x\\D_xvD_x&D_yvD_y&D_zvD_z&D_yvD_x+D_xvD_y&D_zvD_y+D_yvD_z&D_xvD_z+D_zvD_x\\D_xwD_x&D_ywD_y&D_zwD_z&D_ywD_x+D_xwD_y&D_zwD_y+D_ywD_z&D_xwD_z+D_zwD_x\end{bmatrix}$$

式(1)の変分は

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=(\mathbf{D}_L+\mathbf{D}_{N_1})^T\delta\mathbf{U}\quad\cdots\cdots(2)$$

§4. 平衡条件式と力学的境界条件式

$$(\mathbf{D}_L+\mathbf{D}_{N_1}+\mathbf{D}_{N_2})\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{F}=\mathbf{0}\quad\cdots\cdots(3)$$

$$(\mathbf{R}_L+\mathbf{R}_N)\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{T}\quad\cdots\cdots(4)$$

$$\mathbf{D}_{N_2}=\begin{bmatrix}D_{xx}u&D_{yy}u&D_{zz}u&2D_{xy}u&2D_{yz}u&2D_{zx}u\\D_{xx}v&D_{yy}v&D_{zz}v&2D_{xy}v&2D_{yz}v&2D_{zx}v\\D_{xx}w&D_{yy}w&D_{zz}w&2D_{xy}w&2D_{yz}w&2D_{zx}w\end{bmatrix}$$

ここで

$$\mathbf{R}_L=\begin{bmatrix}l&0&0&m&0&n\\0&m&0&l&n&0\\0&0&n&0&m&l\end{bmatrix},\qquad \mathbf{R}_N=\begin{bmatrix}D_xu\cdot l&D_yu\cdot m&D_zu\cdot n&D_yu\cdot l+D_xu\cdot m&D_zu\cdot m+D_yu\cdot n&D_xu\cdot n+D_zu\cdot l\\D_xv\,l&D_yv\,m&D_zv\,n&D_yv\,l+D_xv\,m&D_zv\,m+D_yv\,n&D_xv\,n+D_zv\,l\\D_xw\,l&D_yw\,m&D_zw\,n&D_yw\,l+D_xw\,m&D_zw\,m+D_yw\,n&D_xw\,n+D_zw\,l\end{bmatrix}$$

§5. 微小変位弾性問題の基礎方程式

変位が十分小さい場合, $\boldsymbol{\varepsilon}$ は通常のひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ は通常の応力 $\boldsymbol{\sigma}$ となり, 式(1), (3), (4) の非線形項は消える。

そこで S_u 上の変位を $\bar{\boldsymbol{U}}$, Hooke の法則を $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}$ とおけば, 基礎方程式が右のように表わされることになる.

V 内	$\boldsymbol{D}_L\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$
S_σ 上	$\boldsymbol{R}_L\boldsymbol{\sigma}=\bar{\boldsymbol{T}}$
V 内	$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{D}_L^T\boldsymbol{U}$
S_u 上	$\boldsymbol{U}=\bar{\boldsymbol{U}}$
V 内	$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}$

§6 公式 ($\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{U}$ の一般的な関係式)

ガウスの定理から

$$\int_S \boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{R}_L+\boldsymbol{R}_N)\boldsymbol{\sigma}\,dS=\int_V \boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{D}_L+\boldsymbol{D}_{N_1}+\boldsymbol{D}_{N_2})\boldsymbol{\sigma}\,dV+\int_V \boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{D}_L+\boldsymbol{D}_{N_1})^T\boldsymbol{U}\,dV$$

$$\int_S \delta\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{R}_L+\boldsymbol{R}_N)\boldsymbol{\sigma}\,dS=\int_V \delta\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{D}_L+\boldsymbol{D}_{N_1}+\boldsymbol{D}_{N_2})\boldsymbol{\sigma}\,dV+\int_V \boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{D}_L+\boldsymbol{D}_{N_1})^T\delta\boldsymbol{U}\,dV \quad \cdots\cdots (5)$$

§7. 仮想仕事の原理

V 内で式(2) を, S_u 上で $\delta\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}$ を満足する変位 $\delta\boldsymbol{U}$ と式(3), (4) から

$$\int_V \delta\boldsymbol{U}^T\left((\boldsymbol{D}_L+\boldsymbol{D}_{N_1}+\boldsymbol{D}_{N_2})\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{F}\right)dV+\int_{S_\sigma}\delta\boldsymbol{U}^T\left(\bar{\boldsymbol{T}}-(\boldsymbol{R}_L+\boldsymbol{R}_N)\boldsymbol{\sigma}\right)dS=0 \quad \cdots\cdots (6)$$

式(5) の $\delta\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{\sigma}$ に物理的意味を与えると

$$\int_{S_\sigma}\delta\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{R}_L+\boldsymbol{R}_N)\boldsymbol{\sigma}\,dS=\int_V \delta\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{D}_L+\boldsymbol{D}_{N_1}+\boldsymbol{D}_{N_2})\boldsymbol{\sigma}\,dV+\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,dV \quad \cdots\cdots (7)$$

式(6), (7) から次式がえられる。

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,dV=\int_V \delta\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{F}\,dV+\int_{S_\sigma}\delta\boldsymbol{U}^T\bar{\boldsymbol{T}}\,dS \quad \cdots\cdots (8)$$

§8. 増分法

ある状態の応力, ひずみ, 変位, 物体力, 外力をそれぞれ $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{F}$, $\bar{\boldsymbol{T}}$, この状態からの増分量を $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, $\Delta\boldsymbol{U}$, $\Delta\boldsymbol{F}$, $\Delta\bar{\boldsymbol{T}}$ とすれば, つぎの状態のひずみとその変分は

$$\boldsymbol{\varepsilon}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\left(\boldsymbol{D}_L+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{D}_{N_1}+\tfrac{1}{2}\Delta\boldsymbol{D}_{N_1}\right)^T(\boldsymbol{U}+\Delta\boldsymbol{U})$$

$$\delta(\boldsymbol{\varepsilon}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon})=(\boldsymbol{D}_L+\boldsymbol{D}_{N_1}+\Delta\boldsymbol{D}_{N_1})^T\delta\boldsymbol{U}$$

と表わされる。この場合の仮想仕事の式は式(8)を参照して

$$\int_V \delta(\boldsymbol{\varepsilon}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon})^T(\boldsymbol{\sigma}+\Delta\boldsymbol{\sigma})\,dV=\int_V \delta\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F})\,dV+\int_{S_\sigma}\delta\boldsymbol{U}^T(\bar{\boldsymbol{T}}+\Delta\bar{\boldsymbol{T}})\,dS \quad \cdots\cdots (9)$$

よって $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^*=\Delta\boldsymbol{D}_{N_1}^T\delta\boldsymbol{U}$ とおけば次式がえられる.

$$\int_V(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\Delta\boldsymbol{\sigma}+\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*T}\Delta\boldsymbol{\sigma})\,dV=\int_V \delta\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F})\,dV+\int_{S_\sigma}\delta\boldsymbol{U}^T(\bar{\boldsymbol{T}}+\Delta\bar{\boldsymbol{T}})\,dS-\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\,dV-\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*T}\boldsymbol{\sigma}\,dV$$

1) 黒木健実：マトリックスによる弾性理論の展開, 土木学会西部支部 昭和48年度研究発表会論文集
2) 倉西正嗣：弾性学
3) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論 培風館 1972