I-28　グラフ理論による構造剛性演算法に関する基礎的研究

京都大学　正 員　小西一郎
京都大学　正 員　谷口健男
京都大学　学生員　○ 山下恵治

まえがき　構造解析においては、電子計算機の適用に有利である変位法が一般的に用いられる。変位法においては構造剛性行列の逆行列を求めることが重要な問題である。本論文では逆行列を直接計算するのではなく、ネットワーク理論のノード法における構造剛性行列の行列式および余因子のグラフ的表現を考え、そしてそれらを求める手法と、その手法をさらに有効ならしめる分割解析法について述べ、これによって逆行列を決定しようとするものである。

[I] グラフ理論による構造剛性行列の行列式，余因子について．

本研究では、骨組のもつネットワークトポロジーの性質に注目した解析法の一つである変位法に相当するノード法を用いる。その基礎式は、$u=(A^tkA)^{-1}P$ であらわされる。ここで、uは節点変位，kは部材剛性、Aは部材と節点の結びつきを示すインシデンス行列，Pは節点外力である。行列A^tkAの行列式，余因子に関してつぎのような意義づけができる。行列式を求めることに相当するのはTreeをひろいあげることであり、余因子のそれは2-Treeをひろいあげることである。Treeとは、すべての節点を含み，それを最小の部材数で基礎に連結しているもので、すべての荷重点から基礎にいたる経路はただ一つであるようなものである。つまり、行列式に相当するものは構造物において基礎にいたる経路のすべてをあげることである。2-Treeとは構造物における任意二節点と基礎点に対して定義される一つのCut-Setと考えられるものであり，物理的にはこの二節点の荷重と変位の関連を示す。一方の節点に荷重をかけるとき、この節点より基礎への経路に他方の点を含まない場合基礎が荷重をささえて他方の節点の変位となってあらわれない。応答が0でないためには、二節点を結ぶ経路で基礎に連結していないもの、つまり2-Treeとは二節点を含むTreeと基礎を含むTreeの二つのTreeよりなるものである。つぎに ビネ・コシ展開と木・非木行列式との適用によって導かれる構造剛性行列の行列式，余因子を求める解法の手順を示す。 <行列式>：(1) 行列Aをインプットする。（A：m×n行列，m：部材数，n：節点数，m≧n） (2) Aの行に1からmまでの番号をつける。 (3) 1からmまでのm個の数のうちn個とりだすあらゆる組み合わせをつくる。 (4) (3)の組み合わせのうちの1つをとり、その数に相当するAの行をとりだして正方行列をつくる。 (5) (4)で得られた行列の行列式を求める。 (6) (5)で求めた値が0ならば(4)にもどり別の組み合わせについて行なう，±1ならば(7)へすすむ。 (7) この組み合わせの数に相当するn個の部材の剛性の積，Kを求める。 (8) 演算：D＝K＋D （Dは最終的には行列式を表わす） (9) (4)にもどり別の組み合わせについて行なう。 (10) すべての組み合わせを終了し、行列式，Dをアウトプットする。
<余因子>：(1) 行列Aをインプットする。 (2) Aの行に1からmまでの番号をつける。 (3) Aの第k列をとりさる。（とりさったのこりの行列を$A_{(k)}$であらわす） (4) 1から（m−1）個のうちn個とりだすあらゆる組み合わせをつくる。 (5) (4)の組み合わせのうちの1つをとり、それに相当する$A_{(k)}$の行をとりだし（n−1）×（n−1）の正方行列をつくる。すべての場合がおわれば(8)へすすむ。 (6) (5)で得られた行列の行列式を求める。 (7) (6)で求めた値が0ならば(5)にもどる。 ±1ならばこの組み合わせの数をkのところへ記憶する，(5)にもどる。 (8) k＝k＋1 の演算を行なう。kがn以下ならば(3)へもどる。kが（n＋1）以上ならば(9)へすすむ。 (9) 記憶されたn個のグループでそれぞれ共通集合を求め、余因子を決定する。 (10) 余因子をアウトプットする。　これによって 行列式，余因子が決定される。それぞれを Δ，Δ_{ij} であらわすと $F_{ij}=\Delta_{ij}/\Delta$ とすることによって，構造剛性行列の逆行列が求められる．

(III) 分割解析法について

(I)で述べた計算方法によると，$m \times n$ 行列のAから最大次数の小行列式をつくるさいに，m個のなかからn個とりだす組み合わせに等しい数だけの演算をすることが必要である。これはmが大きくなると，級数的に計算量が増大することを意味している。ところがAという行列式は数多くの零要素を含んでいる。つまり，Aの一つの行について最大2個しか非零要素をもたない。とくにmが大きいとき，このAの最大次数の小行列式を計算して0となることが非常に多い。行列Aについて零要素のみからなるブロックと非零要素を含むブロックとに分割してこの計算回数を減少させることができる。まず連結グラフを二つに分割し，それぞれをI，IIとし，接続部分をCとする。Iには節点番号が1からkまで，IIには節点番号が$k+1$からnまであり，部材番号は小さいものから順にI，C，IIにあたえる。なお，Cに連結される節点番号はIにおいては最も大きいものから，IIにおいては最も小さいものから適当な数だけつけられているとする。そうするとAは右上図のようになりこれは，また右下図のように表記できる。A_uはIの部分において接続部分の部材を基礎へ連結させた連結グラフを意味し，A_LはIIの部分において，接続部分の部材を基礎へ連結させたグラフを意味する。Iにおける部材数をα，IIのそれをβ，Cのそれをγとすると，A_uの行は1から$\alpha+\gamma$，A_Lは$\alpha+1$から$\alpha+\beta+\gamma$である。A_uによって求められるTreeを$T_{u_1}, T_{u_2}, \cdots T_{u_i}$とし，$A_L$のそれを$T_{L_1}, T_{L_2}, \cdots T_{L_j}$とする。これらのあらゆる組み合わせ$i \times j$個をつくる。このうち任意の$T_{u_x}$と$T_{L_y}$について考える。$T_{u_x}$の$k$個の部材を$\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_k$とし$T_{L_y}$の$(n-k)$個の部材を$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{n-k}$とする。$T_{u_x} \cup T_{L_y}$は$n$個の部材からなるが，このなかで同じ部材が2個以上ある場合はAのグラフにおけるTreeを構成しない。つぎにT_{u_x}とT_{L_y}がおなじ部材をもたない場合は，Aのグラフにおいて，

$$\begin{bmatrix} A_{\mathrm{I}} & 0 & \\ 0 & A_c & 0 \\ & 0 & A_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_u & 0 \\ 0 & A_L \end{bmatrix}$$

$T_{u_x} \cup T_{L_y}$がメッシュをもたないとは限らない。ここで$T_{u_x} \cup T_{L_y}$がメッシュをつくる場合について考えるとグラフ理論的な考察によってメッシュの数をP個とすると2^P個のおなじ$T_{u_x} \cup T_{L_y}$ができることがいえる。このことからつぎのステップによってAのグラフにおけるTreeを決定することができる。 (1) Aを2つに分割してA_uとA_Lを決定する。 (2) A_uとA_LよりT_{u_x}，T_{L_y}をすべて求める。 (3) $T_{u_x} \cup T_{L_y}$をすべて求める。 (4) (3)のなかで同じ部材が2つ以上含まれている場合をとりのぞく。 (5) $T_{u_x} \cup T_{L_y}$が他のすべての$T_{u_x} \cup T_{L_y}$と異なる場合をひろいあげる。他におなじ$T_{u_x} \cup T_{L_y}$がある場合，この2つをとりのぞく。（ただし$T_{u_x} \cup T_{L_y}$がP個のメッシュを構成する場合も2つずつとりのぞくとよい。） 分割したグラフの再分割についても，分割されたものをまたあらたに一つの連結グラフを考えると全く同じ論理によって，これは可能である。つぎに節点iを基礎に短絡したグラフのインシデンス行列，A_iにおけるTreeを求める場合について述べる。この場合にも同様の手法によってA_iにおけるTreeを求めることが可能である。したがってすべての節点について，このA_iを求め，そしてそれらの共通集合より，(I)に述べた2-Treeが決定できる。

あとがき　　本研究においては骨組構造解析のグラフ的な考察を行なった。その結果，ネットワークトポロジーの概念より誘導された構造剛性行列の行列式，余因子がグラフ理論におけるTreeという概念を用いて説明できることが明らかになった。さらにその誘導過程において，2-Treeをひろいあげるさいにグラフ理論における木・非木行列式という概念が適用できることがわかり，この方法を有効ならしめる分割解析法について述べた。したがって必ずしも従来行なわれていた逆行列計算を実行しなくても構造解析が可能となる。

参考文献　S.J.Fenves & D.R.Lagerquist "Design Using Symbolic Topological Equations." Prc. ASCE, EM3, June 1969.　S.J.Fenves & F.H.Branin "Network-Topological Formulation of Structural Analysis." Prc. ASCE, ST4, August 1963.　小野寺力男 "グラフ理論の基礎" "グラフ理論の展開と応用"　服部嘉雄，応用電気数学 "グラフ理論とその応用" 電気評論　I. Konishi, N. Shiraishi, S. Tamamura & T. Taniguchi "A Network-Topological Study on Stational Analysis of Rigid Framed Structure." The Memoirs of the Faculty of Eng., Kyoto Univ., 1969.