I-27 平衡マトリックスに関する一研究

熊本大学 工学部 正員 三池亮次
日本水道コンサルタント 正員 ○石田寛生

1．要旨 平衡マトリックスを用いた任意形状部材の剛性方程式の一般式の誘導については，すでに発表のとおりである[1,2]。今回は，この手法を応用して，弾性結合部をもつ部材の剛性マトリックスを誘導し，弾性結合節点をもつ骨組構造の性状について検討した。

2．任意形状部材の平衡マトリックス

図-1において，(i,j)部材に相反作用の原理を適用する。仮想部材の両端における断面力のなす仮想仕事は，部材内部の仮想断面力 $\overline{P}_s^*$ が変形に対してなす仮想仕事に等しいから

$$\overline{P}_{ijj}^{*(t)}\cdot\overline{d}_{ijj}-\overline{P}_{iji}^{*(t)}\cdot\overline{d}_{iji}=\int_i^j\overline{P}_s^*\cdot e_s\,ds \tag{1}$$

ここに，$\overline{P}$，$\overline{d}$ はそれぞれ部材座標系に対する部材端断面力，部材端変位で e_s はひずみのベクトルを表わす。

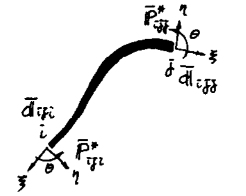

図-1 仮想部材の断面力および部材端変位

また(i,j)部材端断面力の間には，部材平衡マトリックス $\overline{H}_{ij}$ と荷重定数 $\overline{P}_{Lijj}$ を用い

$$\overline{P}_{ijj}=\overline{H}_{ij}\cdot\overline{P}_{iji}+\overline{P}_{Lijj} \tag{2}$$

の関係が成立するから，i端における変位は次式

$$\overline{d}_{iji}=\left\{-\int_i^j(\overline{H}_{is}^{(t)}F_{es}\overline{H}_{is})ds\right\}\overline{P}_{iji}+\left\{-\int_i^j(\overline{H}_{is}^{(t)}F_{es}\overline{P}_{Liss})ds+\int_i^j\overline{H}_{is}^{(t)}C_t\,ds\right\}+\overline{H}_{ij}^{(t)}\cdot\overline{d}_{ijj} \tag{3}$$

あるいは

$$\overline{d}_{iji}=\overline{F}_{ij}\cdot\overline{P}_{iji}+\overline{d}_{Liji}+\overline{H}_{ij}^{(t)}\cdot\overline{d}_{iji} \tag{4}$$

ここに，$\overline{F}_{ij}$ は部材のたわみ性マトリックス，F_{es} はひずみのたわみ性マトリックス，C_t は温度ひずみベクトルである。

(4)式の両辺に左から $\overline{K}=\overline{F}_{ij}^{-1}$ を乗じて(2)式に代入することにより，(i,j)部材の剛性方程式

$$\begin{bmatrix}\overline{P}_{iji}\\ \overline{P}_{ijj}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\overline{K} & \overline{K}\overline{H}_{ij}^{(t)}\\ \overline{H}_{ij}\overline{K} & -\overline{H}_{ij}\overline{K}\overline{H}_{ij}^{(t)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{d}_{iji}\\ \overline{d}_{ijj}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{K}\,\overline{d}_{Liji}\\ \overline{H}_{ij}\overline{K}\,\overline{d}_{Liji}+\overline{P}_{Lijj}\end{bmatrix} \tag{5}$$

を得る。ただし(5)式の $\overline{P}_{iji}$ は(4)式までの $\overline{P}_{iji}$ の方向を反転したものである。

3．結合部のたわみ性を考慮した剛性方程式の誘導

(1) 弾性固定長が微小の場合 図-2において，i'，j' 両点における相対変位 $\overline{d}^{\circ}_{iji'}$，$\overline{d}^{\circ}_{ijj'}$ を用いて，両点の絶対変位を

$$\overline{d}_{iji'}=\overline{d}_{iji}+\overline{d}^{\circ}_{iji'} \tag{6}$$

$$\overline{d}_{ijj'}=\overline{d}_{ijj}+\overline{d}^{\circ}_{ijj'} \tag{6'}$$

と表わすことができる。部材が弾性固定されるとき，i'，j' 端の部材断面力が $\overline{P}_{iji'}$，$\overline{P}_{ijj'}$ であれば，部材端のたわみ性マトリックス $\overline{F}_{iji'}$，$\overline{F}_{ijj'}$ により

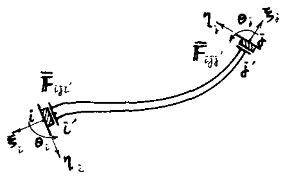

図-2 弾性固定端をもつ部材

$$\overline{d}^{\circ}_{iji'}=\overline{F}_{iji'}\cdot\overline{P}_{iji'} \tag{7}$$

$$\overline{d}^{\circ}_{ijj'}=-\overline{F}_{ijj'}\cdot\overline{P}_{ijj'} \tag{7'}$$

であるから，(7)，(7)'を(6)，(6)' に代入し，さらにこの関係を(i',j')部材についての(4)式に用い，弾性固定効果を含んだ(i,j)部材の変位と断面力の関係式

$$\bar{d}_{iji} = (\bar{F}_{ij} - \bar{F}_{ji'} - \bar{H}^{(t)}_{ij}\cdot\bar{F}_{jj'}\bar{H}_{ij})\bar{p}_{ji} + \bar{H}^{(t)}_{ij}\cdot\bar{d}_{ijj} + (\bar{d}_{Liji'} - \bar{H}^{(t)}_{ij}\bar{F}_{jj'}\bar{p}_{Lijj}) \qquad (8)$$

が誘導される。

(2) 弾性固定部の長さが有限の場合. 弾性固定部に中間荷重が作用しないものとして. i, i' 点, j, j' 点, 相互の変位と断面力の間に次の関係が成立する。

$$\bar{d}_{iji'} = \bar{H}^{(t)}_{ii'}\cdot\bar{d}_{iji} + \bar{d}^{\circ}_{iji'} \qquad (9) \qquad \bar{d}_{ijj'} = \bar{H}^{(t)}_{jj'}\cdot\bar{d}_{ijj} + \bar{d}^{\circ}_{ijj'} \qquad (9)'$$

$$\bar{p}_{iji'} = \bar{H}_{ii'}\cdot\bar{p}_{iji} \qquad (10) \qquad \bar{p}_{ijj'} = \bar{H}_{jj'}\cdot\bar{p}_{ijj} \qquad (10)'$$

(7),(7)'式,(9),(9)'式および(10),(10)'式を用い,(1)の場合と同様の手順で(i',j')部材の(4)式に相当する式から,結合部の弾性変形と長さの効果を考慮した(i,j)部材の変位−断面力関係式

$$\bar{d}_{iji} = \bar{H}^{(t)}_{ii'}(\bar{F}_{i'j'} - \bar{F}_{ji'} - \bar{H}^{(t)}_{i'j'}\bar{F}_{jj'}\bar{H}_{i'j'})\bar{H}_{ii'}\bar{p}_{iji} + \bar{H}^{(t)}_{ii'}\bar{H}^{(t)}_{i'j'}\bar{H}^{(t)}_{j'j}\bar{d}_{ijj}$$
$$+ (\bar{H}^{(t)}_{ii'}\bar{d}_{Li'j'i'} - \bar{H}^{(t)}_{ii'}\bar{H}^{(t)}_{i'j'}\bar{F}_{jj'}\bar{p}_{Li'jj'}) \qquad (11)$$

を得ることができる。なお.(11)式右辺第2項の $\bar{H}^{(t)}_{ii'}\bar{H}^{(t)}_{i'j'}\bar{H}^{(t)}_{j'j} = \bar{H}^{(t)}_{ij}$ である。

4. 適用計算例.

前項までの手法を応用して,図-3に示すような主として軸力が作用する骨組構造と,曲げモーメントの影響の大きい骨組構造を例にとって,節点における結合条件の変化が骨組構造の弾性的特性に及ぼす効果について検討を行なった。

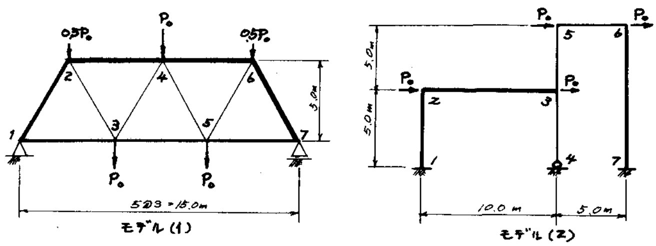

図-3 解析モデル

5. むすび.

計算結果の一部を図-4,図-5に示す。紙面の都合上掲載できなかったが,各モデルの部材断面力の大いさは,剛結合の節点構造をもつ場合と比較して3〜10%程度の変化を示すのみで,とくに弾性結合部の長さを無視した場合,結合部のたわみ性が極端に大きくならない限り(基準部材の1/100以下)その影響は1〜2%程度である。しかしながら,結合部の弾性固定長の変化は,骨組のたわみ特性に大きな影響を与えることがわかり,この点について留意すべきであろう。

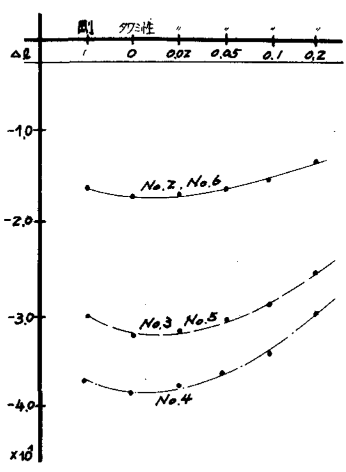

図-4 変位Yと結合部長さΔlの関係

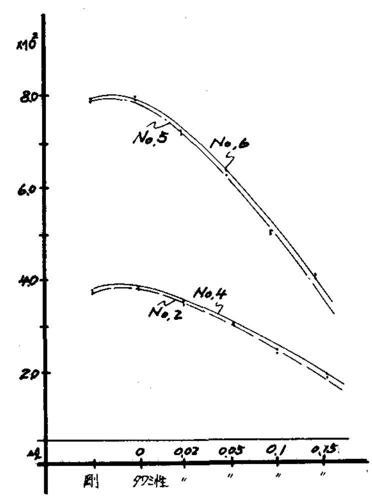

図-5 変位Xと結合部の長さΔlの関係

参考文献

1) 三池亮次:"マトリックス骨組構造解析における2,3の問題" コンピューターによるマトリックス構造解析法講習会 昭46. 3
2) 三池亮次,他:"任意形状部材の平衡および剛性マトリックス" 日本鋼構造協会 第7回研究集会 研究発表会
3) Wang, L.R.: "Parametric Method of Some Structural Members" Jour. S.D. Proc. A.S.C.E ST8 Aug. 1970.