I-26　剛性行列の帯幅減少法に関する2，3の考察

京都大学工学部　正員　小西一郎
京都大学工学部　正員　白石成人
京都大学工学部　正員　○谷口健男

1．まえがき

マトリクス構造解析における剛性行列の最小帯幅は，その対象構造物のトポロジーのみにより確定しているものである。ただ，その節点番号付けにおいて，今日までその最小値を与えるような確立された手法が見い出されていないことより，その帯幅が増減する。

本研究において，対象を2次元連続体に限り，まず，最適節点番号付けを複雑化する要因をとりあげ，つづいて，帯幅を図示する空間を定義するが，これは著者らがすでに提案した"シークエンシャル・ファイル法"[1]のFiling Fieldの一変形である。このFiling Fieldを用いて，特に板構造を例にとり帯幅最小化の一手法の概略を述べ，その手法について考察を加える。

2．構造物のトポロジーと帯幅

有限要素法において，連続体をdiscrete systemに置換するが，その各要素内において，各節点間に相互関係が存在する以上，その要素の力学性状を示すグラフは完全グラフである。しかしながら，そのシステム全体としては完全グラフではない。以上のことより，2次元連続体を示すグラフは必然的にメッシュ・システムとなる。

メッシュ系のあるものは，近似的にトリー系に置換され，シークエンシャル・ファイル法によりその最小帯幅を見い出せるが，この手法は，系の点分布が一様であり，境界の形状が複雑であって凹凸もしている場合に有効な手法といえる。

しかし一般的なメッシュ系は，各点の拘束がトリー系より強く，各点のFiling Fieldにおける自由度が少ない。すなわち，系の1点をfileすると同時に，その点よりの距離1の諸点のFiling Fieldにおける位置が非常に限定されることになり，1点の配置のまちがいにより，Fieldの高さが高くなり，よって帯幅が大きくなる。よって，系をFieldに埋める前に，系の帯幅最大になる近傍をまず見い出す必要があり，Filingはその部分より始める必要がある。

対象構造物を穴あき板，あるいはクラックのある板とすると，穴，クラック周辺において，有限要素分割点の分布は密となり，他の部分は疎である。この点分布の不均一性は，最適節点番号付けにおける一つの問題点となる。すなわち，この不均一性は，番号付けの一つの指針であるグラフの直径方向の発見を困難にさせる。よって点分布を均一化する必要があり，もしグラフ表示するならば，必要な点間の線分長を等しくし（d=1の導入），系の直径方向およびグラフの幅の大小が明確になるようにする必要がある。この操作を行っても，系をねじったり，引き伸ばしたり，あるいは縮少するだけであり，系のトポロジーは不変である。

この特性を利用して連続体を表わすメッシュ系の節点をField内に，その高さが最小になるように埋めこみなおす。ただし，メッシュ系であることより，トリー系とは異なり，線分の方向を許容方向に限ることが困難となる。ここで，許容方向に従わない線分も許して一度グラフに含まれる全節点，全線分をfileし，その逆方向線分の帯幅に及ぼす影響を考えてみる。

従来と同じように，節点番号を，最左点列最上点より下へ，次ぎに第2点列と順次番号を付すと，もし線分方向が全て許容方向であれば，帯幅が最大となるのは，最大個数の点を含む点列においてである。もし逆方向線分が含まれれば，その逆方向を発生せしめている2点列間において，左点列を上方に，もしくは，右点列を下

ろにその逆方向線分が水平になるまで移動すれば、その2点列間の逆方向線分は全て許容方向内線分に置換可能となる。この移動に要した行の数だけ、その左側点列の帯幅は増加する。よって、その帯幅(H.B.W.)は次式で表わされることになる。

H.B.W. = (点列中の点個数) + (移動行数) + 1.

よって、fileされた全点列について、上式を適用し、その値のうちの最大値がその系のH.B.W.となる。上式より、帯幅を小さくするには、各点列に含まれる点個数を少くする、および、移動行数の少ない逆方向線分にとどめるの2つが考えられる。

従来のFiling Fieldにおいては、相隣る2点列間において、点番号は右側点列最下点より左側点列最上点に連らなる。この2点を$d=1$に置くには、上述Fieldの上，下両辺をくっつけた形，すなわち一般に円筒形，葉巻形等の形状となり，それは、3次元Filing Fieldを作る。このように、元の形状が全く失われた新しい形状に系が埋めこまれることになる。ここにおいて、外見上元の系と一致するのは境界の個数だけである。この新しいFiling Fieldにおいて、(点列の点個数)は、その円筒形の周長として表わされ、もし元のFieldにおいて全線分が許容方向であれば、周長最大の位置において系の帯幅を与えることになる。もし逆方向線分が存在すれば、その相隣る2本の円筒周長(点列)間において、互にねじりを加えて全線分を順方向に置換すればよい。よって、

H.B.W. = (周長) + (ねじり回数) + 1.

この各周長は、wave frontに似ているが、全くそのものではない。というのは、$d \neq 1$の点を含んでもよいからであり、各周長は必ずその右側周長より$d=1$の点を全部含み，かつ$d>1$の点も含めて、円筒の最大周長を小さくするように点が選択される。この新しいFiling Fieldを用いることは、2次元連続体を表わすグラフの最小帯幅をさぐるにおいて、3次元空間に同型写像し、かつ、そこに単位長を定義することにより、その周長の大小をもって帯幅を求めようとするものである。

3. 帯幅減少法

板構造を対象として任意分割を行った場合において、それを3次元Filing Fieldに埋め込むと、1端が閉じたパイプ型となるケースも存在する。すなわち、元の境界がパイプ一端の閉断面として表わされる場合である。しかし一般的な置換型は円筒型，葉巻型であり，元の境界は置換型の直径方向に一端より他端にまで延びている。すなわち、元の境界上の相異なる2点づつ、$d=1$で順次結びつけた型となっている。このような形状に該当する板についての有効な帯幅減少法の一つを紹介する。

①. 境界上の任意のi点より他の境界上の点への最短距離を求め、その最大値d_iを求める。②. この操作を境界上の全点について行ない、それらのうちの最小値を求め、それをd_iと表わす。③. 最小値をもつi点より境界上の全点への最短距離d_{ij}を求める。d_{ij}は、j点をi点の右側の点より順次左廻わりにとると、d_{ij}は増加し、続いて減少，再び増加、そして再度減少し最後にjがiに一致したとき0となる。④. ③の操作においてd_{ij}が一度減少した時の最小値の生じるj点(1個とは限らず一般に複数個)をみい出す。このときのd_{ij}は、グラフを横切るに必要な最短距離$\bar{d}_{ij}$となる。⑤. このi，j両点を結ぶパスが一つのwave frontとなり、これの左，右に順次$d=1$の点のみをつないで新しいwave frontsを作成。もし、それらが$\bar{d}_{ij}$より少くとも2以上大きい場合、$\bar{d}_{ij}$に$\bar{d}_{ij}+1$と近傍の点を含めた新しいwave frontを作り、$d>1$の点も含めることを許して上述の操作を繰り返す。⑥. wave frontの中に含まれる点個数が最少になった時、この操作を停止。⑦. ⑥の状態のケースをfiling fieldに埋め込み、逆方向があれば、ねじれを加える。⑧. (点個数)+(ねじり回数)+1を各々について計算し、その最大値をもって、H.B.W.とする。

4. あとがき

上述帯幅減少法は、通常の板構造の節点番号付けに有効であるが、これが該当しない場合もある。なお、適用例は発表当日スライドでもって説明し、かつ、適用不可能である条件も当日示す。

[参考文献] 1). 第20回橋梁．構造工学研究発表会　p.75〜82，1973.