

東京大学 学生員・阿 井 正 博
 東京大学 正 員 西 岡 隆
 東京大学 正 員 奥 村 敏 恵

1. 序

これまで、ケーブル構造は、ケーブルが引張直線部材と考えられる範囲で、骨組（ヒンジ結合）の大変形理論に部材の非抗圧縮性を考慮して解析されているのが一般的であった。しかし、この方法は、ある種の決定された荷重条件（集中荷重）のもとでのケーブル構造の力学系が、その荷重条件に対応する骨組構造に置換できる場合において骨組構造として解析しているものであり、ケーブル構造本来の解析理論ではない。

本報告は、ケーブルの特性に従って、ケーブル構造一般に適用できる（例へば Deep Cable にも適用出来る）一つの変形解析の方法を提案するものである。その方法は、構造系に固有の数の力（部材力）を未知として、それに対して決まる同数の不適合量が収束する様、繰返し計算を行うものであり、一般荷重条件に対して数値的厳密解を得ることを目的としている。

2. 単一ケーブル

空間に直交座標を考え、その原点に長さ l のケーブルの片端を結合し、変形前の長さに沿って x 座標をとる。分布荷重： $p(x) = (p_1(x), p_2(x), p_3(x))$ ，集中荷重： $P_j = (P_{j1}, P_{j2}, P_{j3})$ ，その作用点： $s_j (j=1 \sim n)$ ，および終端の力： $T_e = (T_{e1}, T_{e2}, T_{e3})$ による釣合形を $x(x) = (x_1(x), x_2(x), x_3(x))$ とする (Fig. 1)。この時、伸び歪： $\epsilon(x)$ は

$$\epsilon(x) = \left\{ \sum_{k=1}^3 \left(\frac{dx_k}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \dots \dots (1)$$

で表わせる。引張部材力を $T (= EA\epsilon)$ ， E ：弾性定数， A ：断面積）として、仮想仕事の式は

$$\int_0^l \left[T \delta \epsilon - \sum_{i=1}^3 p_i \delta x_i \right] dx - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^3 P_{ji} \delta x_i(s_j) - \sum_{i=1}^3 T_{ei} \delta x_i(l) = 0$$

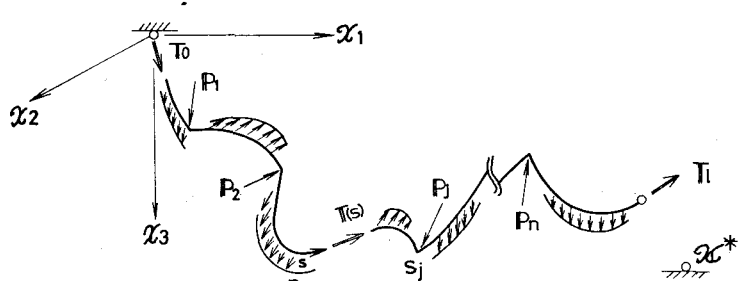


Fig. 1 Single Cable Under General Loading

$$- \sum_{i=1}^3 T_{ei} \delta x_i(l) = 0 \quad (2)$$

となる。これより得られる釣合式、境界条件式は、

$$\text{釣合式: } \frac{d}{ds} \left(T \frac{\frac{dx_i}{ds}}{\left\{ \sum_{k=1}^3 \left(\frac{dx_k}{ds} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right) + p_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

$$\text{境界条件式: } \left(T \frac{\frac{dx_i}{ds}}{\left\{ \sum_{k=1}^3 \left(\frac{dx_k}{ds} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right)_{s_j=0}^{s_j+l} + P_{ji} = 0, \left(T \frac{\frac{dx_i}{ds}}{\left\{ \sum_{k=1}^3 \left(\frac{dx_k}{ds} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right) - T_{ei} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

となり、これらを解くと、釣合形は

$$x_i(s) = \int_0^s \left\{ \frac{T_i(s)}{EA} + \frac{T_i(s)}{\left\{ \sum_{k=1}^3 (T_k(s))^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \right\} ds, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

$$\text{として得られる。但し、} T_i(s) \text{ は } T_i(s) = T_{ei} + \sum_{j>s} P_{ji} + \int_s^l p_i ds (= T_{oi} - \sum_{j<s} P_{ji} - \int_0^s p_i ds) \quad (6)$$

で表わせる引張部材力の x_i 方向成分である。

原点と x^* の点に両端が結合された単一ケーブルの釣合形は、 $x_i(e) = x_i^*$ となるような π_e (又は π_0) を繰返し計算により求めればよい。ここでは、仮定した π_e に対して $x_i(e)$ を求めると同時に

$$\frac{\partial x_i}{\partial \pi_e} \bigg|_{s=e} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \pi_e} \bigg|_{s=0} \right) = \int_0^e \left[\delta_{ij} \left\{ \frac{1}{EA} + \left(\frac{3}{2} \frac{1}{T_e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} - \left(\frac{T_0 T_j}{\sum_{k=1}^3 T_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] ds \quad (7)$$

($i, j = 1, 2, 3$, δ_{ij} : Kronecker's delta)

として表わせる成分をもつマトリックス: $\left(\frac{\partial x_i}{\partial \pi_e} \right)$ を求めて、 $\Delta \pi_e = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \pi_e} \right)^{-1} (x_i^* - x_i(e))$ として π_e を補正する繰返し計算により収束値を得る方法をとる。

3. 組合わせケーブル

単一ケーブルを組合わせて固定節点で支持したケーブル構造では、構造系に固有の数の部材力を適当な個所で仮定すると、すべての部材力は一義的に決まる。そして、その部材力による釣合形を(5)式より求めると、同数の不適合個所が生じるが、それらが適合するような部材力を見出す事により真の釣合形が得られる。

最初に仮定する部材力の数(不適合個所の数)を不適合数と呼ぶ事にすれば、

$$(\text{不適合数}) = (\text{閉合数}) + (\text{固定節点数}) - 1 \quad (8)$$

で表わせる。ここで、閉合数とは空間でケーブルが閉曲線をつくっている数である。

以下(Fig. 2)を例とし変形解析の方法を説明する。

部材力 π_1, π_2, π_3 を仮定すれば、すべての部材

力は一義的に決まり、各部材始端力は

$$\begin{Bmatrix} \pi_{01} \\ \pi_{02} \\ \pi_{03} \\ \pi_{04} \\ \pi_{05} \\ \pi_{06} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U_1 + \dots + U_6 \\ U_2 + U_3 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_4 + U_5 + U_6 \\ U_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^1 + P_1^2 + P_1^4 \\ P_2^4 \\ 0 \\ 0 \\ P_2^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{一般には} \\ \{\pi_0\} = \{S_p\} \{\pi\} + \{U\} + \{P_J\} \end{array} \right) \quad (9)$$

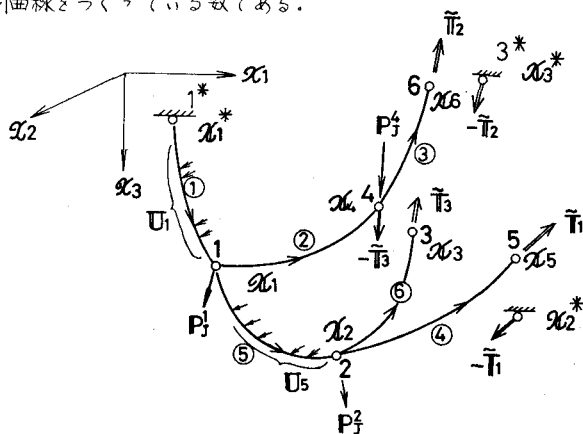


Fig. 2 Non-Compatible Equilibrium Figure

として $\{\pi\}$ の1次結合として表わせる。ここで、 U_i は部材 i に作用する荷重、 P_j^k は節点 j に作用する集中荷重を表す(I は単位行列)。各部材始端力を(6)式に適用して、(5)(7)式より各、 x_{Mi} 、 $\frac{\partial x_{Mi}}{\partial \pi_0}$ (x_{Mi} :部材 i の始端と終端間の相対座標)を求めることができる。これらを組合わせて、不適合座標は

$$\begin{Bmatrix} x_2^* - x_5 \\ x_3^* - x_6 \\ x_4^* - x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_2^* - x_1^* \\ x_3^* - x_1^* \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{一般には} \\ \{\Delta x\} = \{S_x\} \{x_M\} + \{\Delta x^*\} \end{array} \right) \quad (10)$$

として決まる。仮定した $\{\pi\}$ の値に対して線型化した時の $\{\Delta x\}$ に対する $\{\delta \pi\}$ は

$$\{\delta \pi\} = -(\{S_x\} \{Q\} \{S_p\})^{-1} \{\Delta x\} \quad (11)$$

として得られる。但し、 $\{Q\}$ は $\frac{\partial x_{Mi}}{\partial \pi_0}$ を対角にならべに行列である。 $\{\pi\}$ を $\{\pi\} + \{\delta \pi\}$ に補正して繰返し計算をする事により、 $\{\Delta x\} = \{0\}$ となる $\{\pi\}$ を得る事ができ、部材上の任意点の座標を得ることが出来る。

なお、本研究は文部省科学研究費の補助を受けたことを付記する。

(参考文献)

- O'Brien, W. Terence, and Francis, Arthur J. "Cable Movements Under Two-Dimensional Loading," ASCE, Vol. 90, NO. ST3, Proc. Paper 3929, June, 1964, PP. 89-123.
- H. Mellmann "Analysis of Plane Prestressed Cable Structures", ASCE, Vol. 96, NO. ST10, Proc. Paper 7598, October, 1970.