

佐友重機械工業(株) 北 原 俊 男

1. まえがき

本報告は、梁要素よりなる構造物(アーチ, ラーメン等)の幾何学的非線形解析に関する一考察を行つたものである。この種の研究成果は大変多く発表されているが、筆者は解析手法による初期にわみ角の考慮という点に留意して検討を試みないので、ここに、次の2点について発表する。

- 1) 荷重増分ステップで初期軸力と初期にわみ角を考慮した場合の基礎方程式について
- 2) 2ヒンジアーチの面内非線形座屈解析値と座屈係数等について

2. 基礎方程式

各増分ステップでは変位 δ が比較的小さいとして力と変位の関係はLagrangian表示によって解析を行う。今、考えているステップまでに、外力 P_0 の作用に対して、変位 u_0 , 応力 σ_0 が生じているとする。この状態に、更に荷重 P_1 が作用して変位 u_1 , 応力 σ_1 が新たに生じたものとする。この

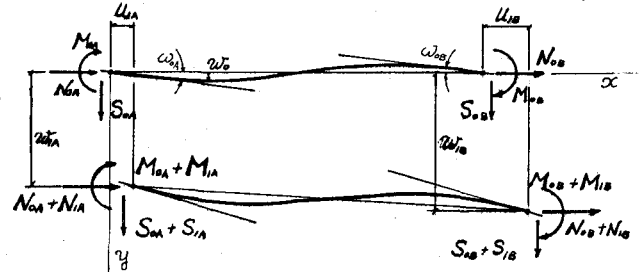


図 - 1

時、新たに生じた変位エネルギー・ポテンシャル ΔV_e および外力ポテンシャル ΔV_P は次式によって表わされる。

$$\Delta V_e = \int_V (\epsilon_1 \cdot \sigma_0 + \frac{1}{2} \epsilon_1 \cdot \sigma_1) dV \quad (1) \quad \Delta V_P = -(P_0 + P_1) \cdot u_1 - u_0 \cdot P \quad (2)$$

梁要素についてのみ考えるから、軸線の伸びは $\epsilon_1 = u_1' + \frac{1}{2} (w_1')^2 - \frac{1}{2} (w_0')^2$, 曲率の増分は $\kappa = w_1'' - w_0''$ で表わせるとすると、 ΔV_e , ΔV_P は次のようになる。

$$\Delta V_e = \int_L \left[N_0 \left\{ u_1' + \frac{1}{2} (w_1')^2 - \frac{1}{2} (w_0')^2 \right\} + M_0 (w_1'' - w_0'') + \frac{AE}{2} \left\{ u_1' + \frac{1}{2} (w_1')^2 - \frac{1}{2} (w_0')^2 \right\} + \frac{EI}{2} (w_1'' - w_0'')^2 \right] dx \quad (3)$$

$$\Delta V_P = -(N_{0A} + N_{1A}) u_{1A} - (S_{0A} + S_{1A}) w_{1A} - (M_{0A} + M_{1A}) (w_1'' - w_0'')_A - (N_{0B} + N_{1B}) u_{1B} - (S_{0B} + S_{1B}) w_{1B} - (M_{0B} + M_{1B}) (w_1'' - w_0'')_B \quad (4)$$

$\delta V = \delta(\Delta V_e) + \delta(\Delta V_P)$ から停留条件として次の微分方程式が導かれる。

$$AE(u_1')' + \frac{AE}{2} \{(w_1')^2\}' = 0 \quad (5) \quad N_0 w_1'' + AE(u_1' w_1')' + \frac{AE}{2} \{(w_1')^2\}' - \frac{AE}{2} (w_0')^2 w_1'' - EI w_1'''' = 0 \quad (6)$$

(6)式について次のような近似計算が可能なものとする。

$$(6) = N_0 w_1'' + AE \left\{ u_1' + \frac{1}{2} (w_1')^2 - \frac{1}{2} (w_0')^2 \right\} w_1'' - EI w_1'''' = (N_0 + N_1) w_1'' - EI w_1'''' = 0 \quad (7)$$

(7)式は軸力の作用した梁要素の微分方程式であり、一般解は多くの文献で述べられているので省略する。図-1に示される境界条件によって、力と変位の関係をマトリックス表示にしたのが(8)式である。(8)式中、 w_{1A} , w_{1B} は増分ステップでの格点のにわみ角($w = w_1' - w_0'$)を表わす。また Δ/L , $\Delta/2$, ρ は次式によって求める。

$$\frac{\Delta}{L} = \int_0^L (w_1')^2 dx, \quad \frac{\Delta_0}{L} = \int_0^L (w_0')^2 dx, \quad \rho = \frac{w_{1B} - w_{1A}}{L} \quad (9)$$

(8)式は非線形方程式になっているため、Newton-Raphson Methodによって収束計算を行う。なお、収束の判定には変位増分、応力増分の積を用い、積が許容値以下になるまで繰り返し計算を行う。

$$\begin{bmatrix} N_A \\ S_A \\ M_A \\ N_B \\ S_B \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 2k_{23}\frac{EI}{L^3} & k_{23}\frac{EI}{L^2} & 0 & -2k_{23}\frac{EI}{L^3} & k_{23}\frac{EI}{L^2} \\ 0 & k_{23}\frac{EI}{L^2} & k_{23}\frac{EI}{L} & 0 & -k_{23}\frac{EI}{L^2} & k_{23}\frac{EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -2k_{23}\frac{EI}{L^3} & -k_{23}\frac{EI}{L^2} & 0 & 2k_{23}\frac{EI}{L^3} & -k_{23}\frac{EI}{L^2} \\ 0 & k_{23}\frac{EI}{L^2} & k_{23}\frac{EI}{L} & 0 & -k_{23}\frac{EI}{L^2} & k_{23}\frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1A} \\ W_{1A} \\ \omega_{1A} \\ U_{1B} \\ W_{1B} \\ \omega_{1B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{AE}{2}(\frac{\Delta-A_2}{L}) - N_{0B} \\ \frac{EI}{L^2}k_{23}(\omega_{0A} + \omega_{0B}) - P N_{1B} \\ \frac{EI}{L}(k_{21}\omega_{0A} + k_{22}\omega_{0B}) \\ \frac{AE}{2}(\frac{\Delta-A_2}{L}) + N_{0B} \\ -\frac{EI}{L^2}k_{23}(\omega_{0A} + \omega_{0B}) + P N_{0B} \\ \frac{EI}{L}(k_{22}\omega_{0A} + k_{21}\omega_{0B}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

各増分ステップでの初にわみ角は、次式によって求める。

$$(\omega_{0A})_{n+1} = (\omega_{0A})_n + (\omega_{1A})_n - \frac{W_{1B} - W_{1A}}{L}, \quad (\omega_{0B})_{n+1} = (\omega_{0B})_n + (\omega_{1B})_n - \frac{W_{1B} - W_{1A}}{L} \quad (10)$$

3. 数値計算による考察

今回の数値計算は $f/L = 0.1$ の 2 ピンジ・アーチ (図-2) に対して、7 ケースの荷重形式について行った。荷重ケースは $P/W = 0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.6, 1.0$ とした。図-2 の断面特性を決める基準としては、道路橋示方書 (11, 3, 1) を準用した。

$$W = d \cdot \frac{EI}{L^3} \cdot \frac{f}{L} \quad (11) \quad \text{但し } f/L = 0.1, L = 100 \text{ m}$$

(11) 式に変換係数 $d = 36.0$ $W = 6.0 \text{ t/m}$ を代入し、 $I = 0.079 \text{ m}^4$ を求めた。断面積 A はやはり示方書を準用して $A = 0.33 \text{ m}^2$ とした。

図-3 は何倍 (γ) の載荷荷重で屋座するか P/W を横軸にとって表わしたものである。

図-4 は限界水平反力 H_{cr} と P/W の関係を図化したものである。図中より、 $P/W = 0$ のときの H_{cr} を 5800 t と求めた (なお、計算値は $P/W = 0.001$ で $H_{cr} \approx 5750$ であった)。この H_{cr} に対して変換係数を求めると、 $d = 34.96$ となった。

図-5 には H_{cr}/H_{cr0} と P/W の関係を図化した ($H_{cr0} = 5800 \text{ t}$)。図中には示方書に規定されている関係式も同時に示した。

これらの結果から判断すれば、図-2 のような偏載荷重に関する屋座値および限界水平反力算出用の実用公式または図表の作成が非線形解析によらず更に充実にさせることが可能ではないかと思う。

