

1. まえがき

梁のたわみに関する研究は多く行われている。ここ十年来進歩してきた有限要素法はこの分野でしばしば適用されている。しかし、その多くが荷重増分の程度、釣合、R位置で再度釣合方程式を立てて、繰り返し解いていく方法であった。この方法は、言い換えると、荷重増分のたびに座標変換することになる。又、多くが軸力による変形を無視している。この論文では、仮想仕事の原理に基づき、有限要素法を適用して、座標を固定して解こうとしてRものである。梁の軸力による変形を含めて、Elastica の問題に適用した。

2. 仮想仕事による釣合方程式

仮想仕事の原理に基づき、自重による仕事の項を除くと次のように釣合方程式は与えられる。

$$\int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V t_i \delta u_i dS \quad (1)$$

ここで、 σ_{ij} , e_{ij} , t_i および u_i は、それぞれ応力テンソル、ひずみテンソル、表面の分布力および変位である。グリーンの有限変位のひずみテンソルは次のように与えられる。

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入し、応力テンソルの対称性を考慮すると全荷重に対する釣合方程式は次のようになる。

$$\int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV + \int_V \sigma_{ij} u_{k,i} \delta u_{k,j} dV = \int_V t_i \delta u_i dS \quad (3)$$

一方、増増荷重による釣合方程式は次のように求めることができる。 $\bar{\sigma}_{ij}$ および $\bar{e}_{ij}$ を、それぞれ初期状態における応力およびひずみテンソルとし、 σ_{ij} および e_{ij} を増増荷重による応力およびひずみテンソルとすれば、 e_{ij} は $(\bar{e}_{ij} + e_{ij}) - \bar{e}_{ij}$ から求められるので、釣合方程式は次のように導かれる。

$$\int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV + \int_V \sigma_{ij} u_{k,i} \delta u_{k,j} dV + \int_V \bar{\sigma}_{ij} \bar{u}_{k,i} \delta u_{k,j} dV + \int_V \bar{\sigma}_{ij} u_{k,i} \delta u_{k,j} dV = \int_V t_i \delta u_i dS \quad (4)$$

3. 梁の曲げへの適用

梁の曲げの解析では、一般に軸に直角に作用する応力は無視するので応力テンソルは次のようになる。

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

z および y 方向の変位 v および w (Fig-1) は、 $\sin v' = v'$, $\cos v' = 1$ とみなせば、

$$v = v_0 \quad (6a)$$

$$w = w_0 - v_0' y \quad (6b)$$

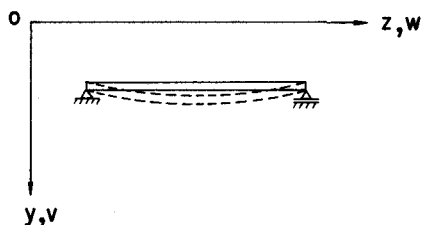


Fig. 1 Coordinate System

式(5), (6a) および (6b) を式(4)に代入すると式(4)の各項は次のように表わせる。

$$\int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_L (P \delta w_0' - M_x \delta v_0'') dz \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \int_V \bar{\sigma}_{ij} u_{k,i} \delta u_{k,j} dV = & \int_L \{ -\bar{M}_x (v_0' \delta w_0' + w_0' \delta v_0'') + \frac{1}{2} \bar{I}_x (v_0' \delta v_0'' + v_0'' \delta v_0') + \bar{P} (v_0' \delta v_0' + w_0' \delta w_0') \\ & - \bar{M}_x (w_0' \delta v_0'' + v_0'' \delta w_0') + \bar{I}_x v_0' \delta v_0'' \} dz \end{aligned} \quad (7b)$$

$\int_V \sigma_{ij} u_{k,i} \delta u_{k,j} dV$ および $\int_V \sigma_{ij} u_{k,i} \delta u_{k,j} dV$ は式(7b)の各項のうち、 $\bar{u}_{k,i}$ に相当するものに $-$ を付した式、および $-$ を全く付さない式となる。

上式中部材力 P , M_x および L_x は次のように定義される。

$$P = \int_A \sigma_y dA, \quad M_x = \int_A \sigma_y y dA, \quad L_x = \int_A \sigma_y y^2 dA \quad (8)$$

また R , $\sigma_y = E(\omega_z' - \omega_y'' y)$ を式(8) に代入して、行列表示すると、

$$\begin{Bmatrix} P \\ M_x \\ L_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & S_x \\ S_x & I_x \\ I_x & U_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E \omega_z' \\ -E \omega_y'' \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここで、 $A = \int_A dA$, $S_x = \int_A y dA$, $I_x = \int_A y^2 dA$ および $U_x = \int_A y^3 dA$ で定義され、断面力 M_x および L_x は

$$\begin{Bmatrix} M_x' \\ L_x' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & I_x \\ I_x & U_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E \omega_z' \\ -E \omega_y'' \end{Bmatrix} \quad (10)$$

4. 有限要素法の適用

変位 ω_z に対し 2 次関数、変位 ω_y に対しては 3 次関数を用いれば、要素内の変位関数は次のように仮定できる。

$$\omega_z = \langle f_2 \rangle \{ \psi \}, \quad \omega_y = \langle f_3 \rangle \{ \psi \} \quad (11)$$

ここで、 $\{ \psi \}$, および $\{ \psi \}$ は節点変位のベクトルであり、 $\langle f_2 \rangle$ および $\langle f_3 \rangle$ は

$$\langle f_2 \rangle = \langle (2\beta - 1)(\beta - 1), -4\beta(\beta - 1), \beta(2\beta - 1) \rangle, \quad \langle f_3 \rangle = \langle -3\beta^2 + 2\beta^3, \beta - 2\beta^2 + \beta^3, 3\beta^2 - 2\beta^3, \beta^2 \beta^2 \rangle \quad (12)$$

式(12)において、 $\beta = x/l$ である。式(11) を式(7) に代入して有限要素化すると次のようになる。

Stiffness Matrix $[K_s]$

Geometric Matrix $[K_g]$

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [K_{22}^{11} A] & -[K_{23}^{11} S_x] \\ -[K_{32}^{11} S_x] & [K_{33}^{11} I_x] \end{bmatrix} \quad (13a)$$

$$[K_g] = \begin{bmatrix} [K_{22}^{11} \bar{P}] & [K_{23}^{11} \bar{P}_x] - [K_{23}^{11} \bar{P}_x] \\ [K_{32}^{11} \bar{P}_x] - [K_{32}^{11} \bar{P}_x] & [K_{33}^{11} \bar{P}] + [K_{33}^{11} \bar{L}_x] \\ & + [K_{33}^{11} \bar{L}_x] \end{bmatrix} \quad (13b)$$

Initial Deformation Matrix $[K_0]$

$$[K_0] = \begin{bmatrix} [K_{22}^{11} A \bar{\omega}_z'] - [K_{23}^{11} S_x \bar{\omega}_y''] & -[K_{23}^{11} S_x \bar{\omega}_z'] + [K_{23}^{11} I_x \bar{\omega}_y''] \\ [K_{32}^{11} A \bar{\omega}_z'] - [K_{32}^{11} S_x \bar{\omega}_z'] + [K_{33}^{11} I_x \bar{\omega}_y''] - [K_{33}^{11} S_x \bar{\omega}_z'] & -[K_{33}^{11} S_x \bar{\omega}_z'] + [K_{33}^{11} I_x \bar{\omega}_z'] - [K_{33}^{11} U_x \bar{\omega}_y''] + [K_{33}^{11} I_x \bar{\omega}_z'] \\ + \frac{1}{2} [K_{33}^{11} I_x \bar{\omega}_z'] + \frac{1}{2} [K_{33}^{11} I_x \bar{\omega}_z'] - [K_{33}^{11} S_x \bar{\omega}_z'] & -\frac{1}{2} [K_{33}^{11} U_x \bar{\omega}_z'] - \frac{1}{2} [K_{33}^{11} U_x \bar{\omega}_z'] + [K_{33}^{11} I_x \bar{\omega}_z'] \end{bmatrix} \quad (13c)$$

Nonlinear Stiffness Matrix $[K_N]$ は $[K_0]$ 中の変位 $\bar{\omega}_z$ および $\bar{\omega}_y$ が $\bar{\omega}_z$ および $\bar{\omega}_y$ とな、 R マトリックスである。分布荷重に対する荷重ベクトル $\{R\}$ は

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_2 \langle f_2 \rangle \\ \bar{q}_3 \langle f_3 \rangle + m \bar{q}_3 \langle f_3 \rangle \end{Bmatrix} \quad (13d)$$

式(13a)~(13c)において、小行列は次の定義による。

$$[K_{mn}^{ij} \bar{q}_k(\beta) \bar{q}_l(\beta)] = \frac{1}{l^{m+n}} \int_0^l \langle f_k \rangle \langle f_l \rangle \{ \psi \} \{ \psi \} d\beta \quad (14)$$

ここで $\bar{q}_k(\beta)$ および $\bar{q}_l(\beta)$ は A , S_x などの断面係数の関数あるいは $\bar{P}$, $\bar{P}_x$ などの初期部力、あるいは $\bar{\omega}_z$, $\bar{\omega}_y$ などの初期変位としてもよい。いずれも $\bar{q}$ の関数と考えられ、要素の釣合方程式は次のようになる。

$$[[K_s] + [K_g] + [K_0] + [K_N]] \{r\} = \{R\} \quad (15)$$

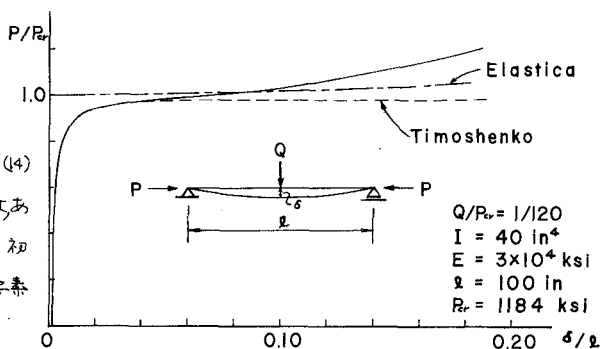


Fig. 2 Load-Deflection Relationships

5. 計算例

以上の計算式に基づいて、軸力を受ける梁の問題に適した。梁断面の係数は Fig-2 示す通りで、この梁に一定の横荷重 10 Keps が作用している。軸力 P と梁中央のたわみ δ の関係を図-2に示した。無次元化のため、 P は応荷重 R_v で、 δ は長さ l で割ったものを用いた。

謝辞：この研究はカナダ・アルバータ大学の D.W. Murray の指導のもとで行われた。