I-14　Discrete Variational Technique の構造力学への適用について

琉球大学　正会員　○大 城　武
琉球大学　正会員　渡嘉敷 直彦

1. まえがき

最近、応用力学の分野において変分学の応用が行なわれているが、格子桁、Latticed Shell 等のdiscreteな問題を取り扱った例はない。連続体の近似として有限和を考えるのとは異なり、この理論は、Discrete Field Analysis を考え、その解法の一つとして Discrete Variational Technique を説明している。ここでは、この理論から導かれる差分方程式の解(closed form solution)を連続ゲタの例をもって示している。

2. Calculus of Variation in Discrete Field Analysis

変分学で知られている様に、全ポテンシャルエネルギーの停留条件の下で構造物の釣合いを考える事が出来る。一般に汎関数として、次の関数を考える。

$$U(Y)=\sum_{\alpha=1}^{N}F(\alpha,Y,\nabla Y,\nabla^2 Y)=\Delta^{-1}F(\alpha,Y,\nabla Y,\nabla^2 Y)\Big|_{1}^{N+1} \tag{1}$$

ここで、Y、∇Y、$\nabla^2 Y$は discreteな変数αの関数であり、又 ∇, Δ^{-1}は差分及び和分の演算子で、次の様に定義する。: $\nabla Y(\alpha)=Y(\alpha)-Y(\alpha-1)$, $\nabla^r Y(\alpha)=\nabla(\nabla^{r-1}Y(\alpha))$, $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=N}Y(\alpha)=\Delta^{-1}Y(\alpha)\Big|_{\alpha=1}^{\alpha=N+1}$

変分として$\epsilon h(\alpha)$をとり、許容関数, $\bar{Y}(\alpha)$を, $\bar{Y}(\alpha)=Y(\alpha)+\epsilon h(\alpha)$と考える。ここで、$\epsilon$は微小なパラメータとする。$\bar{Y}(\alpha)$を用いると、式(1)は $U(\bar{Y})=U[Y+\epsilon h(\alpha)]$と書かれる。ここで、$U(\bar{Y})$はパラメータ, ϵ, の連続関数となり、次の様にあらわされる。

$$U(\bar{Y})=U(\epsilon)=\Delta^{-1}F(\alpha,\ Y+\epsilon h,\ \nabla Y+\epsilon\nabla Y,\ \nabla^2 Y+\epsilon\nabla^2 Y)\Big|_{\alpha=1}^{\alpha=N+1} \tag{2}$$

停留条件は $\frac{\partial U(\epsilon)}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}=0$ となり、式(2)より

$$\frac{\partial U(\epsilon)}{\partial\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}=\Delta^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial\bar{Y}}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial\epsilon}+\frac{\partial F}{\partial\nabla\bar{Y}}\frac{\partial\nabla\bar{Y}}{\partial\epsilon}+\frac{\partial F}{\partial\nabla^2\bar{Y}}\frac{\partial\nabla^2\bar{Y}}{\partial\epsilon}\right)\Big|_{1}^{N+1}\Big|_{\epsilon=0}=\Delta^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial Y}h+\frac{\partial F}{\partial\nabla Y}\nabla Y+\frac{\partial F}{\partial\nabla^2 Y}\cdot\nabla^2 Y\right)\Big|_{1}^{N+1}=0 \tag{3}$$

上式に部分和分法を用いることにより、次式を得る。

$$\left[\Delta^{-1}\left\{\frac{\partial F}{\partial Y}-\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial\nabla Y}\right)+\Delta^2\left(\frac{\partial F}{\partial\nabla^2 Y}\right)\right\}h+\left\{\frac{\partial F}{\partial\nabla Y}-\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial\nabla^2 Y}\right)\right\}E^{-1}h+\frac{\partial F}{\partial\nabla^2 Y}E^{-1}\nabla h\right]_{\alpha=1}^{\alpha=N+1}=0 \tag{4}$$

ここで、$E^{-1}f(\alpha)=f(\alpha-1)$, $\Delta f(\alpha)=f(\alpha+1)-f(\alpha)$ と定義する。

式(4)にϵをかけ、又和分の範囲を変えることにより、次式を得る。

$$\Delta^{-1}\left[\left\{\frac{\partial F}{\partial Y}-\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial\nabla Y}\right)+\Delta^2\left(\frac{\partial F}{\partial\nabla^2 Y}\right)\right\}\epsilon h\right]_{\alpha=1}^{\alpha=N}-\left[\left\{E\left(\frac{\partial F}{\partial\nabla Y}-\Delta\frac{\partial F}{\partial\nabla^2 Y}\right)\right\}\epsilon h+\left(E\frac{\partial F}{\partial\nabla^2 Y}\right)\nabla\epsilon h\right]_{\alpha=0}+\left[\left\{\frac{\partial F}{\partial Y}+\frac{\partial F}{\partial\nabla Y}-\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial\nabla^2 Y}\right)\epsilon h+\left(E\frac{\partial F}{\partial\nabla^2 Y}\right)\nabla\epsilon h\right]_{\alpha=N}=0 \tag{5}$$

上式で、最初のカッコ内に示された式が、格点における釣合方程式を示し、第二番目，第三番目のカッコ内が$\alpha=0$，Nの自然境界条件を示している。

3. Modified Discrete Variational Method

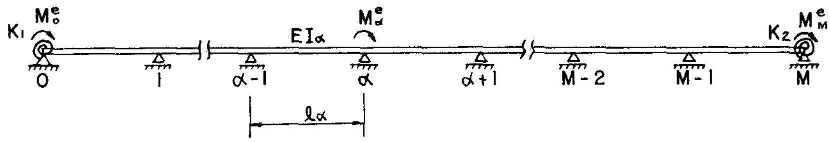
適当な多項式又は級数を仮定し、上記の式(5)をとくのであるが、特殊な場合を除いては、境界条件を満足する解はない。ここに述べる方法は、その様な満足されない解を修正することにより、一般的な境界条件を満す解を見い出すことである。その為には、境界においてのみ作用する修正パラメータを用いる。連続ゲタの場合、三角関数を用いるが、その際に直交性の範囲、および Weighting function, W_α, に注意する必要がある。

これらを考えて、式(5)を次のように変形する。(ここで、$\nabla^2 Y$、$\nabla^2\epsilon h$の項は、単純化のため省略)

$$\Delta^{-1}W_\alpha\left[\frac{\partial F}{\partial Y}-\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial\nabla Y}\right)-\lambda^1\delta_\alpha^0-\lambda^2\delta_\alpha^N\right]\epsilon h\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=N+1}-\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{\partial F}{\partial Y}+(\Delta+2)\frac{\partial F}{\partial\nabla Y}-\lambda^1\right\}\epsilon h\right]_{\alpha=0}+\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{\partial F}{\partial Y}+(\Delta+2)\frac{\partial F}{\partial\nabla Y}+\lambda^2\right\}\epsilon h\right]_{\alpha=N}=0 \tag{6}$$

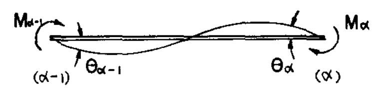
ここで、$\delta_\alpha^{\alpha_1} = \begin{matrix} 1 & \alpha=\alpha_1 \\ 0 & \alpha\neq\alpha_1 \end{matrix}$ 及び $W_\alpha = \begin{matrix} 1/2 & \alpha=0, N \\ 0 & \alpha\neq 0, N \end{matrix}$ と定義する。

4. 連続ゲタの解法



$\left.\begin{matrix}K_1\\K_2\end{matrix}\right\}$ バネ定数

上記の連続ゲタで total potential energy を次式の様にあらわす。



$$U=\sum_{\alpha=1}^{M}\frac{1}{2}(M_\alpha\cdot\theta_\alpha+M_{\alpha-1}\cdot\theta_{\alpha-1})+\frac{k_1}{2}\theta_0^2+\frac{k_2}{2}\theta_M^2-\sum_{\alpha=0}^{M}M_\alpha^e\theta_\alpha$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{M}\frac{b_\alpha k_\alpha}{2}\Big[(r_\alpha-\nabla)\theta_\alpha\cdot\theta_\alpha+\{(1-r_\alpha)\nabla+r_\alpha\}\theta_\alpha(1-\nabla)\theta_\alpha\Big]$$

$$+\frac{K_1}{2}\theta_0^2+\frac{K_2}{2}\theta_M^2-\sum_{\alpha=0}^{M}M_\alpha^e\cdot\theta_\alpha \qquad (7)$$

$M_\alpha = b_\alpha k_\alpha(r_\alpha-\nabla)\theta_\alpha$

$M_{\alpha-1} = b_\alpha k_\alpha\{(1-r_\alpha)\nabla+r_\alpha\}\theta_\alpha$

ここで、$b_\alpha=2$, $r_\alpha=3$

式(7)を式(6)に適用することにより(ここで、$b_\alpha k_\alpha = bk =$ 一定 と仮定)

$$\delta U=\Delta^{-1}W_\alpha\Big[bk(\Delta+2r)\theta_\alpha-\frac{M_\alpha^e}{W_\alpha}-\lambda_1\delta_\alpha^0-\lambda_2\delta_\alpha^M\Big]\epsilon\theta_\alpha\Big|_0^{M+1}$$

$$+\Big[\Big\{\frac{bk}{2}H\theta_\alpha+K_1\theta_\alpha+\frac{\lambda_1}{2}\Big\}\epsilon\theta_\alpha\Big]_{\alpha=0}+\Big[\Big\{-\frac{bk}{2}H\theta_\alpha+K_2\theta_\alpha+\frac{\lambda_2}{2}\Big\}\epsilon\theta_\alpha\Big]_{\alpha=M}=0 \qquad (8)$$

ここで、$\Delta f(\alpha)=f(\alpha+1)-2f(\alpha)+f(\alpha-1)$, $Hf(\alpha)=f(\alpha+1)-f(\alpha-1)$ 上記の式(8)は、境界を含めた釣合方程式と、修正した境界条件を次の様にあらわすことが出来る。

$$\left.\begin{aligned}&\delta\bar{U}=\Delta^{-1}W_\alpha\Big[bk(\Delta+2r)\theta_\alpha-\frac{M_\alpha^e}{W_\alpha}-\lambda_1\delta_\alpha^0-\lambda_2\delta_\alpha^M\Big]\epsilon\theta_\alpha\Big|_0^{M+1}=0\\&\alpha=0 \text{ で } \frac{bk}{2}H\theta_0+K_1\theta_0+\frac{\lambda_1}{2}=0\\&\alpha=M \text{ で } -\frac{bk}{2}H\theta_M+K_2\theta_M+\frac{\lambda_2}{2}=0\end{aligned}\right\}\qquad(9a,b,c)$$

式(9a,b,c)をとくために、次の様な有限級数を考える。

$$\theta_\alpha=\sum_{m=0}^{M}\theta_m\cos\lambda_m\alpha,\quad \frac{M_\alpha^e}{W_\alpha}=\sum_{m=0}^{M}M_m\cos\lambda_m\alpha,\quad \epsilon\theta_\alpha=\sum_{m=0}^{M}\delta\theta_m\cos\lambda_m\alpha \qquad (10a,b,c)$$

ここで、$\lambda_m=\frac{m\pi}{M}$, $M_m=\frac{1}{\Gamma_m}\Delta^{-1}M_\alpha^e\cos\lambda_m\alpha\Big|_0^{M+1}$, $\Gamma_m=\sum_{m=0}^{M}W_\alpha\cos^2\lambda_m\alpha$

式(10a,b,c)を式(9)に代入して

$$\theta_m=\Big\{M_m+\frac{1}{\Gamma_m}(\lambda_1+\lambda_2\cos m\pi\Big\}/C_m \qquad (11)$$

ここで、$C_m=2bk(\cos\lambda_m-1+r)$

更に式(10a),式(11)を(9b,c)に代入することにより、次式を得る。

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_1\sum_{m=0}^{M}\frac{1}{\Gamma_mC_m}+\frac{1}{2} & K_1\sum_{m=0}^{M}\frac{\cos m\pi}{\Gamma_mC_m}\\ K_2\sum_{m=0}^{M}\frac{\cos m\pi}{\Gamma_mC_m} & K_2\sum_{m=0}^{M}\frac{\cos^2 m\pi}{\Gamma_mC_m}+\frac{1}{2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-K_1\sum_{m=0}^{M}\frac{M_m}{C_m}\\ -K_2\sum_{m=0}^{M}\frac{M_m\cos m\pi}{C_m}\end{bmatrix} \qquad (12a.b)$$

式(12a.b)により得られたλ_1, λ_2を式(11)に代入することにより、バネ定数を境界にもつ連続ゲタの解が得られる。