

大阪工業大学

正員 岡村宏一

東洋技研コンサルタント

〃 島田 功

同上

〃 〇森 茂義

1. まえがき: 3次元弾性問題について, 等方弾性体の場合には, 基本的な解 (Kelvin 解, Boussinesq, Cerruti らの解, Mindlin 第1, 第2問題の解) が見出されているが, 異方性体に対しては, 軸対称問題の解以外, 筆者の知る限りでは見当たらないようである。ところで, 筆者はすでに部分的に剛性の異なる3次元体の1つの数値解法を提案した。標記の問題も, 等方弾性体からの剛性の偏倚として同様に扱うことができ, この解法は, 直交異方性体の問題に限らず, 任意の異方性体の問題にも適用できる。

さて, 3次元体に作用する力の影響は, 離れゆく箇所では, いよいよ急激な減少を示し, 異方性の影響も離れた所では, あらわれなくなるであろう。したがって, 問題によっては, 異方性の条件を, ある有限な範囲に制限しても, 実用上, 十分な精度で解析でき, この問題も部分的に剛性の異なる問題として扱うことができる。また, このような扱いは, 3次元問題がしばしば局所的な事象について論じられる事実を考慮すれば, 解析の目的によっては, 実用上, 有利な面を持つものといえよう。さらに, 本解法は, 弾性問題の厳密解である Mindlin 解の線形化した重ね合せであり, 連続解を基底においており, 高精度の解も期待でき, さらに分布荷重に対する解析も, Boussinesq, Cerruti, Mindlin らの解を積分したものを特解として与えることにより, 容易に²⁾おおよそ変位²⁾できる。本文は, このような見地に立って, 異方性体の解析への本解法の妥当性, ならびに異方性による応力分布の変化などについて述べるものである。なお, その1部は, すでに報告した²⁾が, その後得られたデータを加えて報告する。

2. 解法: 直交異方性体の弾性マトリックスを一般に $[D]$ とすると,

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ & & & & 1/G_{yz} & 0 \\ & & & & & 1/G_{zx} \end{bmatrix}$$

対称

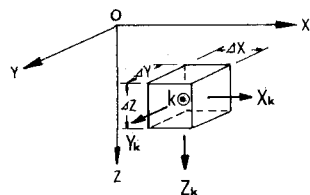


図-1 有限小領域

$[D_0]$ を基本となる等方弾性体の弾性マトリックスとし, $[D] = [D_0] + [\Delta D]$ のように分離すると, 応力-ひずみ関係は

$$\{\sigma\} = [D_0]\{\epsilon\} + [\Delta D]\{\epsilon\} \quad \text{--- (1)}$$

したがって, 釣合条件式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 u &= - \left(\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z} \right) = -X \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 v &= - \left(\frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z} \right) = -Y \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w}{\partial z^2} \right) + G_0 \nabla^2 w &= - \left(\frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} \right) = -Z \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (2)}$$

1) 岡村, 島田: “弾塑性, もししくは不均質弾性を有する3次元体の1数値解法”

土木学会論文報告集 No. 212, pp. 11~24, 1973

2) 岡村, 島田, 森: “直交異方性3次元体の1数値解析” 関西支部年次学術講演概要 pp. I-11-1~2, 1974

ただし, $\{\sigma^*\} = [AD]\{\epsilon\}$, G_0, E_0, λ_0 は基本となる等方弾性体の弾性定数

さて, 式(2)の右辺の項 X, Y, Z は弾性マトリックスの偏倚量 $[AD]$ に従属する係数であり, 釣合条件式の性格から, Body Force と同様の意味を持つ物理量である。ところで, 前論文¹⁾にも示したように, 異方性体内に設けた選点角を包む有限小領域では, これらの物理量は均一な分布を持つものとみなせば(図-1参照), 各小領域の X_R, Y_R, Z_R は, 選点間の部分の差合法により, $\{\epsilon\}$ に属する1次式として与えられ, さらに, $\{\epsilon\}$ は, 各選点におけるひずみの条件による連立方程式の解として定まり, 今割られた小領域で評価されねばならない X_R, Y_R, Z_R が求まり, これらを Body Force として作用させることにより, 任意点のひずみ, ならびに応力が求まる。なお, 歪を積分した変位については, 本問題のように半無限体の問題では, 制限した領域外の異方性の影響を考慮しがいけない。3次元体内に作用する力の影響(歪について)は, 離れたところ

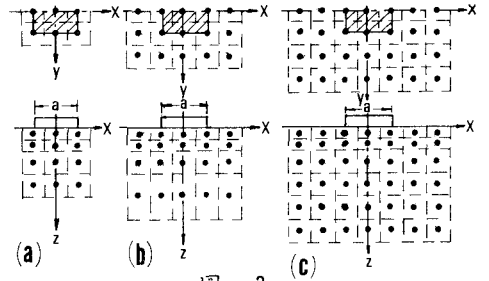


図-2

で,

$$\epsilon = \frac{q_1}{r^2} + \frac{q_2}{r^3} + \dots \quad (3)$$

ただし, r : 荷重中心からの距離

a_1, a_2 : 制限した領域内の

歪から決定される定数

のように表わされるものと仮定すると, 制限した領域の周囲の点 q_0 の変位は, 式(3)を $0 \rightarrow q_0$ まで積分することにより求まる。厳密解のある等方弾性体の場合について, その妥当性を検討すると, r が, 荷重分布幅の3倍以上離れた点の変位は, 式(3)の2項まで採ることにより, 誤差は最大変位の5%以内におさまるようである。

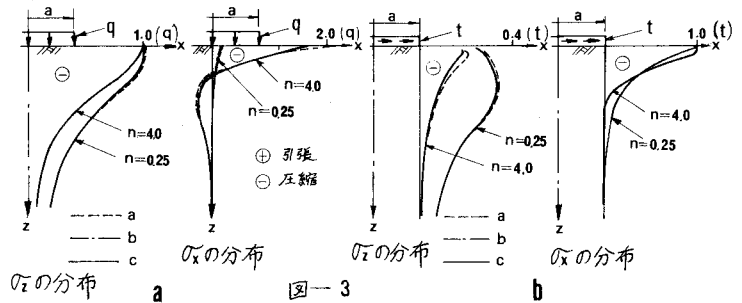


図-3

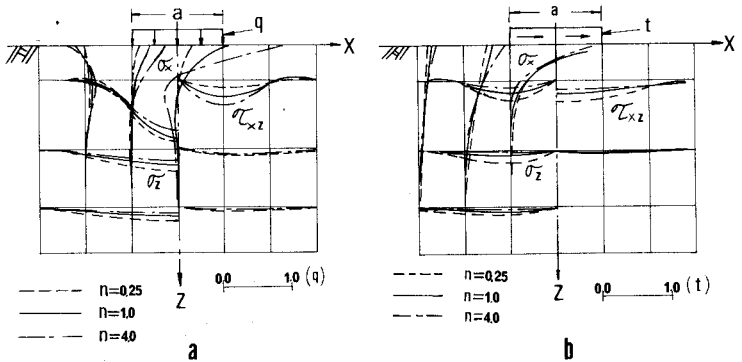


図-4

3. 計算例: 異方性体として, Z

軸に直角な方向のヤング率を E_H , Z 軸方向のヤング率を E_V , ポアソン比 ν のものを扱い, $n = E_H/E_V$ を変化させた結果を示す。

例1. 半無限体の表面に2種類の荷重(鉛直荷重(q), 水平荷重(t))が作用した場合(作用領域 axa)の解析をおこなった。図-3は異方性の範囲を図-2のように制限した場合の応力の差を調べたものであり,

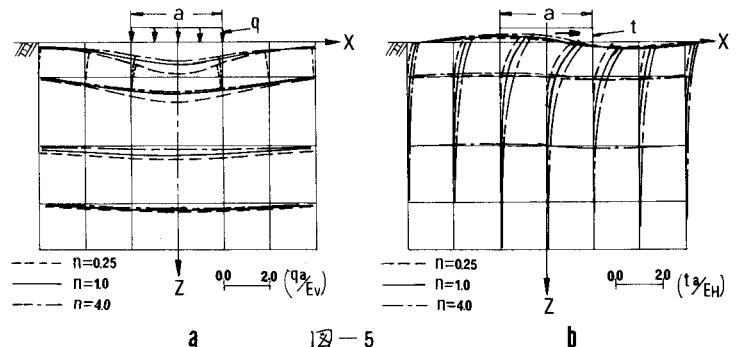


図-5

図-2(b)に示す範囲までを異方性として解析し、
 実用上、十分な解が得られるようである。せん断応
 力についても異方性の範囲を変えた結果は同様によ
 く一致しており、データを省略した。 n を変えた場
 合の応力および変位状態を図-4, 5に示した。

例2, 半無限体の表面より $5a$ の位置に鉛直力(P)
 , 水平力(S)が作用した場合(作用領域 $a \times a \times a$)の

解析をおこなった。図-7は、
 異方性の範囲を図-6のように
 制限した場合の差異を調べたも
 のであり、図-6(b)の範囲で十
 分な精度の解が得られるよう
 である。図-8, 9は n を変え
 た時の応力および変位状態であ
 る。例1, 2の変位状態は、式(9)
 の2項までを採り、制限した異方
 性の範囲の周囲の値を求め図示
 したものである。また有限領域
 の分割を密にした場合につい
 ても、計算をおこなったが、荷
 重近傍に若干の差があらわれる
 のみであり、データを省略した。

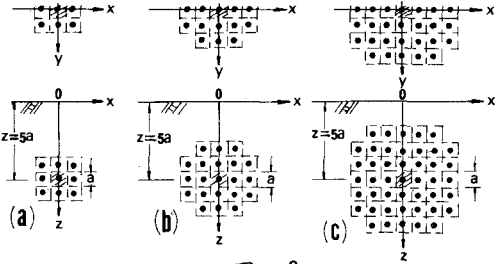


図-6

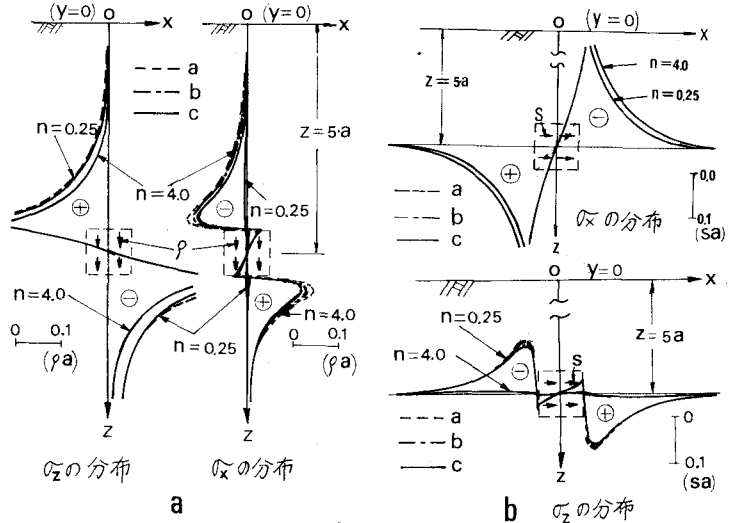


図-7

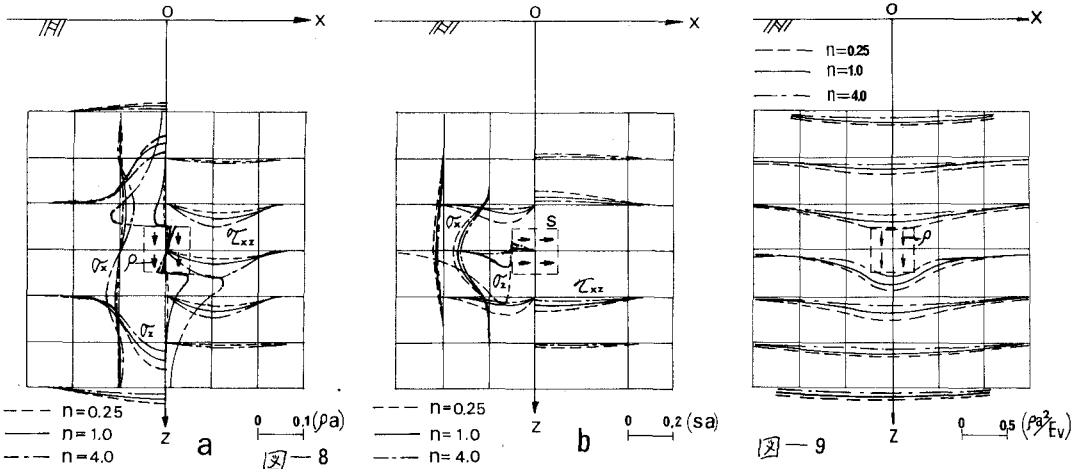


図-8

図-9

4. むすび: 前節に示したデータから本解析は異方性体の3次元弾性問題の解析において、異方性の範囲を
 制限しようという利点と相まって、有用であるといえる。さて、異方性による応力状態への影響については、い
 ずれの荷重状態においても、弾性係数の大きい方向の応力が増大する。たとえば、表面に鉛直荷重を受ける場合
 , 荷重直下の σ_z は、 n が小さくなるほど増大し、その増加する範囲は、表面より深くなるほど広がり、一方 σ_x
 は n が大きくなるほど増大し、 $n=4$ でかなり顕著である。せん断応力 τ_{xz} に対する異方性の影響は、荷重幅
 の1.5倍以上離れると、ほとんど影響を受けないようである。