I-8　弾性基礎上の直方体の応力解析について

北見工業大学　正員　奥村　勇

1. まえがき

弾性基礎上に置かれた直方体が，その上面の中央に矩形分布の一様圧縮荷重を受けた場合について，弾性基礎を縦方向にのみ抵抗するばねと考えて，級数解法により，3次元応力解析を行なったので報告する。

2. 基本解と変位および応力

釣合方程式の解を変位ベクトル $\mathfrak{u}$ (u, v, w) で次のように表わす。

$$2G\,\mathfrak{u} = -\mathrm{grad}\,F + 4(1-\nu)\boldsymbol{\Phi} + 2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Theta} \quad \text{注)} \qquad (1)$$

ここで

$$F = \Phi_0 + R\,\boldsymbol{\Phi} \quad (2) \qquad \nabla^2\Phi_0 = 0,\ \nabla^2\boldsymbol{\Phi} = 0,\ \nabla^2\boldsymbol{\Theta} = 0 \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3),\quad \boldsymbol{\Theta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3),\quad R = (x, y, z)$$

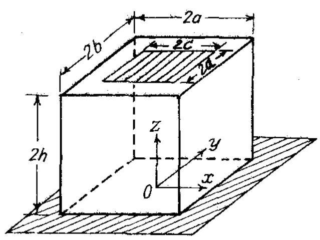


図-1

また，Gはせん断弾性係数，νはポアソン比を表わすものとする。式(3)に示されているように，Φ_0，Φ_i，ϑ_i ($i=1,2,3$) 等は3次元的調和関数である。したがって，式(2)によりFは3次元的重調和関数となる。これらの諸関数の記載は省略するが，式(1)から導出される変位および応力は，例えば，次のようである。

$$2G\,w_{(n,s)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \cos\beta_s y \sin k_n z \left\{-(k_n A_{ns}^{(1)} + 2\beta_s A_{ns}^{(3)})\cosh l_{ns}x + k_n A_{ns}^{(2)} x \sinh l_{ns}x\right\} \qquad (4)$$

$$2G\,w_{(n,i)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \cos\alpha_i x \sin k_n z \left\{(-k_n B_{ni}^{(1)} + 2\alpha_i B_{ni}^{(3)})\cosh m_{ni}y + k_n B_{ni}^{(2)} y \sinh m_{ni}y\right\} \qquad (5)$$

$$2G\,w_{(i,s)} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \cos\alpha_i x \cos\beta_s y \Big[\left\{\gamma_{is} C_{is}^{(1)} + (3-4\nu) C_{is}^{(2)}\right\}\sinh\gamma_{is}z + \left\{\gamma_{is}\bar{C}_{is}^{(1)} + (3-4\nu)\bar{C}_{is}^{(2)}\right\}\times$$
$$\times\cosh\gamma_{is}z - \gamma_{is}C_{is}^{(2)} z\cosh\gamma_{is}z - \gamma_{is}\bar{C}_{is}^{(2)} z\sinh\gamma_{is}z\Big] \qquad (6)$$

$$\sigma_{z(n,s)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \cos\beta_s y \cos k_n z \left\{(2\nu l_{ns} A_{ns}^{(2)} - k_n^2 A_{ns}^{(1)} - 2\beta_s k_n A_{ns}^{(3)})\cosh l_{ns}x + \right.$$
$$\left. + k_n^2 A_{ns}^{(2)} x \sinh l_{ns}x\right\} \qquad (7)$$

$$\sigma_{z(n,i)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \cos\alpha_i x \cos k_n z \left\{(2\nu m_{ni} B_{ni}^{(2)} - k_n^2 B_{ni}^{(1)} + 2\alpha_i k_n B_{ni}^{(3)})\cosh m_{ni}y + \right.$$
$$\left. + k_n^2 B_{ni}^{(2)} y \sinh m_{ni}y\right\} \qquad (8)$$

$$\sigma_{z(i,s)} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \cos\alpha_i x \cos\beta_s y \Big[\left\{\gamma_{is}^2 C_{is}^{(1)} + 2(1-\nu)\gamma_{is}C_{is}^{(2)}\right\}\cosh\gamma_{is}z + \left\{\gamma_{is}^2\bar{C}_{is}^{(1)} + \right.$$
$$\left. + 2(1-\nu)\gamma_{is}\bar{C}_{is}^{(2)}\right\}\sinh\gamma_{is}z - \gamma_{is}^2 C_{is}^{(2)} z\sinh\gamma_{is}z - \gamma_{is}^2\bar{C}_{is}^{(2)} z\cosh\gamma_{is}z\Big] \qquad (9)$$

ここで

$$l_{ns} = \sqrt{k_n^2 + \beta_s^2},\quad m_{ni} = \sqrt{k_n^2 + \alpha_i^2},\quad \gamma_{is} = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_s^2} \qquad (10)$$

$$\alpha_i = i\pi/a,\quad \beta_s = s\pi/b,\quad k_n = n\pi/2h \quad (i, s, n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (11)$$

$$2G\,w = 2G\left(w_{(n,s)} + w_{(n,i)} + w_{(i,s)}\right),\quad \sigma_z = \sigma_{z(n,s)} + \sigma_{z(n,i)} + \sigma_{z(i,s)} \qquad (12)$$

また，上記の諸式は，応力状態が $x=0$ 面，$y=0$ 面に関して対称となることを考慮してある。$A_{ns}^{(1)}$，$B_{ni}^{(1)}$，$C_{is}^{(1)}$，$\bar{C}_{is}^{(1)}$ 等は決定されるべき未知定数である。

3. 境界条件と未知定数の関係式

$(\tau_{xy})_{x=\pm a} = 0$，$(\tau_{xz})_{x=\pm a} = 0$ より

$$A_{ns}^{(3)} = 0,\quad A_{ns}^{(1)} = A_{ns}^{(2)}(2\nu - 1 + l_{ns}a\coth l_{ns}a)/l_{ns} \qquad (13)$$

$(\tau_{xy})_{y=\pm b} = 0$，$(\tau_{yz})_{y=\pm b} = 0$ より

$$B_{ni}^{(3)} = 0,\quad B_{ni}^{(1)} = B_{ni}^{(2)}(2\nu - 1 + m_{ni}b\coth m_{ni}b)/m_{ni} \qquad (14)$$

$(\tau_{xz})_{z=0} = 0$，$(\tau_{yz})_{z=0} = 0$ より

$$\bar{C}_{is}^{(3)} = 0,\quad \bar{C}_{is}^{(1)} = -(1-2\nu)\bar{C}_{is}^{(2)}/\gamma_{is} \qquad (15)$$

$(\tau_{xz})_{z=2h}=0$, $(\tau_{yz})_{z=2h}=0$ より

$$C_{is}^{(3)}=0 \quad , \quad C_{is}^{(1)}=\{C_{is}^{(2)}(2h\gamma_{is}\coth 2h\gamma_{is}-1+2\nu)+2h\gamma_{is}\overline{C}_{is}^{(2)}\}/\gamma_{is} \qquad (16)$$

したがって，基本解に含まれる12個の未知定数が，上式の関係により、4個の未知定数に減少する。

$(\sigma_z)_{z=2h}=-p(x,y)$ より

$$\sum_{n=0}^{\infty}({}_nI_{is}^{1}A_{ns}^{(2)}+{}_nJ_{si}^{1}B_{ni}^{(2)})+K_{is}^{1}C_{is}^{(2)}+ + \overline{K}_{is}^{1}\overline{C}_{is}^{(2)}=-p_{is} \qquad (17)$$

$(\sigma_z)_{z=0}=K(w)_{z=0}$ より（K：地盤反力係数）

$$\sum_{n=0}^{\infty}({}_nI_{is}^{2}A_{ns}^{(2)}+{}_nJ_{si}^{2}B_{ni}^{(2)})+K_{is}^{2}C_{is}^{(2)}+ + \overline{K}_{is}^{2}\overline{C}_{is}^{(2)}=0 \qquad (18)$$

$(\sigma_x)_{x=\pm a}=0$ より

$$I_{ns}A_{ns}^{(2)}+\sum_{i=0}^{\infty}(iJ_{sn}^{3}B_{ni}^{(2)}+iK_{ns}^{1}C_{is}^{(2)}+ + i\overline{K}_{ns}^{1}\overline{C}_{is}^{(2)})=0 \qquad (19)$$

$(\sigma_y)_{y=\pm b}=0$ より

$$J_{ni}B_{ni}^{(2)}+\sum_{s=0}^{\infty}(sI_{in}^{3}A_{ns}^{(2)}+sK_{ni}^{2}C_{is}^{(2)}+ + s\overline{K}_{ni}^{2}\overline{C}_{is}^{(2)})=0 \qquad (20)$$

したがって，式（17）～式（19）の4群連立一次方程式を解き，未知定数 $A_{ns}^{(2)}$, $B_{ni}^{(2)}$, $C_{is}^{(2)}$ および $\overline{C}_{is}^{(2)}$ を求めればよいことになる。

ここで，未知定数に掛る係数は，例えば，式（17）についでは次のようである。

$${}_nI_{is}^{1}=\frac{4(-1)^{n+i}\varepsilon_i}{a(l_{ns}^2+\alpha_i^2)^2}\sinh l_{ns}a\{l_{ns}^2\alpha_i^2+\nu\beta_s^2(l_{ns}^2+\alpha_i^2)\}$$

$${}_nJ_{si}^{1}=\frac{4(-1)^{n+s}\varepsilon_s}{b(m_{ni}^2+\beta_s^2)^2}\sinh m_{ni}b\{m_{ni}^2\beta_s^2+\nu\alpha_i^2(m_{ni}^2+\beta_s^2)\}$$

$$K_{is}^{1}=\gamma_{is}\left(\frac{2h\gamma_{is}}{\sinh 2h\gamma_{is}}+\cosh 2h\gamma_{is}\right)$$

$$\overline{K}_{is}^{1}=\gamma_{is}\sinh 2h\gamma_{is} \quad , \quad \varepsilon_0=\frac{1}{2} \ , \quad \varepsilon_i=1 \ (i\geqq 1)$$

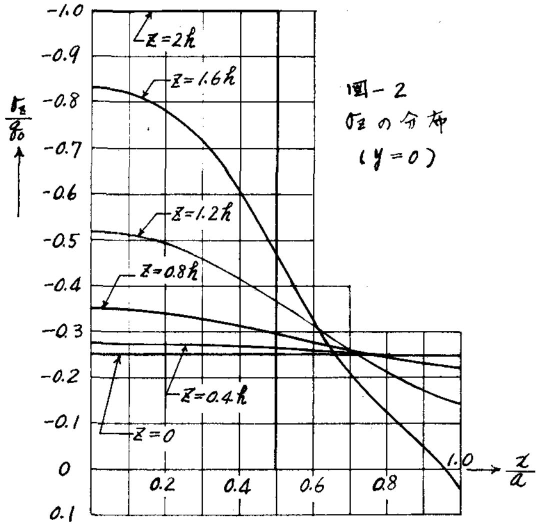
$$p_{is}=\frac{2dq_0}{b\pi}\frac{\delta_s\overline{\delta}_i}{i}\sin\alpha_i c+\frac{2cq_0}{a\pi}\frac{\delta_i\overline{\delta}_s}{s}\sin\beta_s d+ +\frac{4q_0}{\pi^2}\frac{\overline{\delta}_i\overline{\delta}_s}{is}\sin\alpha_i c\sin\beta_s d$$

ただし，$\delta_0=1$, $\overline{\delta}_0=0$ $\overline{\delta}_i=1$ $(i\geqq 1)$

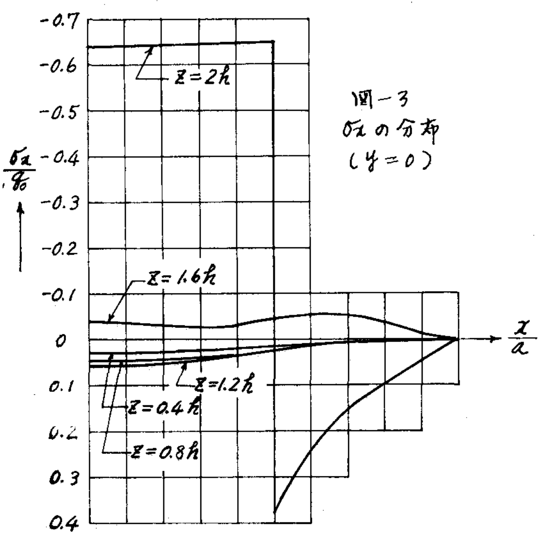
4．数値計算例

$a=b=h$ の Cube の場合で，荷重分布が正方形（$c=d$）の場合を取り扱った。この場合は，$B_{ni}^{(2)}=A_{ni}^{(2)}$ の関係があるので，3群連立一次方程式を解くことになる。級数の項数を18項まで取り，$a=2^{m}$, $c=1^{m}$, $K=20^{kg}/cm^3$ として応力を求め，図－2～図－4に示した。q_0 は荷重強度を表わす。

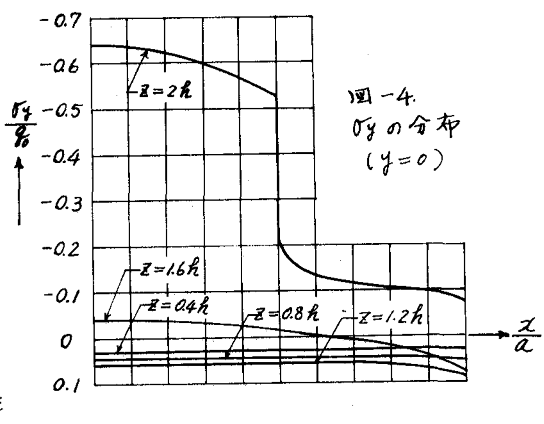
注）秦 謹一 「三次元応力問題の解法について」北海道大学工学部研究報告，第13号，P.17，昭和30年



図－2
σz の分布
（y=0）



図－3
σx の分布
（y=0）



図－4
σy の分布
（y=0）