

北海道大学工学部 正員 能町純雄

聖蘭工業大学

同 〇松岡健一

1. はじめに 多層弾性体の応力問題は、従来数多く研究されているが、表面にせん断力を受ける問題の計算例はあまりみられないのでここに発表する。これは高速道路や空港の滑走路の舗装体に及ぼす、車輛の制動荷重の影響の問題等に適用できるものである。

2. 無限厚板の変位および応力の一般解 表面にせん断力を受ける厚板の問題は、非軸対称な次元問題であるが、Fourier-Hankel 変換を行なうことにより、容易に解得することができる。今無限厚板の座標を図-1に示すようにとり、変位を u, v, w 、応力を $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ とすると変位および応力の一般解は次のようになる。

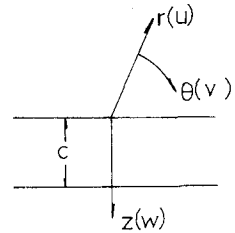


図-1.

$$u = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \{A_{m32} J_{m+1}(\xi r) + B_{m32} J_{m-1}(\xi r)\} d\xi \cos m\theta \quad (1)$$

$$v = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \{A_{m32} J_{m+1}(\xi r) - B_{m32} J_{m-1}(\xi r)\} d\xi \sin m\theta \quad (2)$$

$$w = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty W_{m32} J_m(\xi r) d\xi \cos m\theta \quad (3)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \left\{ \lambda \Delta + 2\mu (A_{m32} - B_{m32}) \right\} J_m(\xi r) - 2\mu \left\{ (m+1) A_{m32} J_{m+1}(\xi r) - (m-1) B_{m32} J_{m-1}(\xi r) \right\} \frac{1}{r} \right\} d\xi \cos m\theta \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \left\{ \lambda \Delta J_m(\xi r) + 2\mu \left\{ (m+1) A_{m32} J_{m+1}(\xi r) - (m-1) B_{m32} J_{m-1}(\xi r) \right\} \frac{1}{r} \right\} d\xi \cos m\theta \quad (5)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \left\{ -\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \left\{ \phi_{m32}^{(k)} + \psi_{m32}^{(k)} \right\} D_{m32} - \left\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \phi_{m32}^{(k)} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (\phi_{m32}^{(k)} - \psi_{m32}^{(k)}) \right\} \frac{1}{r} (\delta_{m32} - \delta_{m3k}) \right\} J_m(\xi r) d\xi \cos m\theta \quad (6)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \left\{ \mu \left\{ \xi^2 (A_{m32} - B_{m32}) J_m(\xi r) - 2\left\{ (m+1) A_{m32} J_{m+1}(\xi r) + (m-1) B_{m32} J_{m-1}(\xi r) \right\} \frac{1}{r} \right\} d\xi \sin m\theta \quad (7) \right.$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \left\{ T_{m32}^a J_{m+1}(\xi r) - T_{m32}^b J_{m-1}(\xi r) \right\} d\xi \sin m\theta \quad (8), \quad \tau_{rz} = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \left\{ T_{m32}^a J_{m+1}(\xi r) + T_{m32}^b J_{m-1}(\xi r) \right\} d\xi \cos m\theta \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_{m32} &= \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{1}{\mu} \phi_{m32}^{(k)} \frac{1}{\xi} \delta_{m3k} + \frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)} (\phi_{m32}^{(k)} + \psi_{m32}^{(k)}) \frac{1}{\xi} (\delta_{m3k} - \delta_{m3k}) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \phi_{m32}^{(k)} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (\phi_{m32}^{(k)} - \psi_{m32}^{(k)}) \right\} D_{m3k} \right] \\ B_{m32} &= \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{1}{\mu} \phi_{m32}^{(k)} \frac{1}{\xi} \delta_{m3k} - \frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)} (\phi_{m32}^{(k)} + \psi_{m32}^{(k)}) \frac{1}{\xi} (\delta_{m3k} - \delta_{m3k}) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \phi_{m32}^{(k)} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (\phi_{m32}^{(k)} - \psi_{m32}^{(k)}) \right\} D_{m3k} \right] \\ W_{m32} &= \sum_{k=1}^2 \left[\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} P_{m32}^{(k)} \frac{1}{\xi} (\delta_{m3k} - \delta_{m3k}) + \left\{ Q_{m32}^{(k)} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} P_{m32}^{(k)} \right\} D_{m3k} \right] \\ \Delta &= \sum_{k=1}^2 \left[-\phi_{m32}^{(k)} \left\{ \frac{1}{2\mu+\lambda} \frac{1}{\xi} (\delta_{m3k} - \delta_{m3k}) + \frac{2\mu}{2\mu+\lambda} D_{m3k} \right\} \right] \\ T_{m32}^a &= \sum_{k=1}^2 \left[Q_{m32}^{(k)} \frac{1}{\xi} \delta_{m3k} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} P_{m32}^{(k)} \left\{ \frac{1}{2\mu+\lambda} (\delta_{m3k} - \delta_{m3k}) + \mu D_{m3k} \right\} \right], \quad T_{m32}^b = \sum_{k=1}^2 \left[Q_{m32}^{(k)} \frac{1}{\xi} \delta_{m3k} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} P_{m32}^{(k)} \left\{ \frac{1}{2\mu+\lambda} (\delta_{m3k} - \delta_{m3k}) + \mu D_{m3k} \right\} \right] \\ Q_{m32}^{(1)} &= \frac{\sinh \xi C}{\sinh \xi C}, \quad Q_{m32}^{(2)} = \frac{\sinh \xi C}{\sinh \xi C}, \quad \phi_{m32}^{(1)} = \frac{\cosh \xi C}{\sinh \xi C}, \quad \phi_{m32}^{(2)} = -\frac{\cosh \xi C}{\sinh \xi C}, \\ P_{m32}^{(1)} &= \xi C \phi_{m32}^{(1)} - Q_{m32}^{(1)} \frac{\xi C}{\sinh \xi C}, \quad P_{m32}^{(2)} = \xi C \phi_{m32}^{(2)} + \xi C Q_{m32}^{(2)} \frac{\cosh \xi C}{\sinh \xi C}, \\ \psi_{m32}^{(1)} &= \xi C Q_{m32}^{(1)} - \phi_{m32}^{(1)} \frac{\xi C}{\sinh \xi C}, \quad \psi_{m32}^{(2)} = \xi C Q_{m32}^{(2)} + \xi C \phi_{m32}^{(2)} \frac{\cosh \xi C}{\sinh \xi C}, \end{aligned}$$

上式において $C \rightarrow \infty$ とすれば、半無限体の一般解となる。また式中の γ, δ, D は境界条件により決定される積分定数であり、 μ, λ は Lamé の定数、 $J_m(\xi r)$ は m 次の第一種ベッセル函数である。

3. 多層弾性体の解析

多層弾性体は、 z で示される厚板の一般解を境界条件を満足するように重ねることにより解析することができる。今多層弾性体を図-2に示すように、境界を表面から数えて、 $0, 1, \dots, i, \dots, n$ とし、 $i-1, i$ 間の層の全ての物理量、函数をサフィックス i を付し、 z は各層の局所座標と与えるものとすると、 z 境界における境界条件は、変位および応力が連続であるから

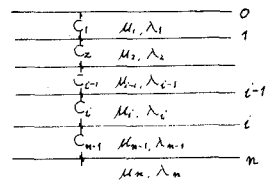


図-2

$$u_i|_{z=c_{i-1}} = u_{i-1}|_{z=c_{i-1}} \quad (10), \quad v_i|_{z=c_{i-1}} = v_{i-1}|_{z=c_{i-1}} \quad (11), \quad w_i|_{z=c_{i-1}} = w_{i-1}|_{z=c_{i-1}} \quad (12),$$

$$\sigma_{zi}|_{z=c_{i-1}} = \sigma_{zi-1}|_{z=c_{i-1}} \quad (13), \quad \tau_{ri}|_{z=c_{i-1}} = \tau_{ri-1}|_{z=c_{i-1}} \quad (14), \quad \tau_{\theta z}|_{z=c_{i-1}} = \tau_{\theta z-1}|_{z=c_{i-1}} \quad (15)$$

となる。(12), (14), (15) の条件は、 $D_{m31}^i = D_{m32}^i = D_{m3}^i$, $\gamma_{m15}^i = \gamma_{m152}^i = \gamma_{m15}^i$, $\delta_{m15}^i = \delta_{m152}^i = \delta_{m15}^i$ とすることにより満足する。さらに、 D_{m3}^i , γ_{m15}^i , δ_{m15}^i は、

(10), (11), (13) の条件を満足するように決定する。(10), (11) の条件は

次のようにもかける。

$$A_{m32}^i|_{z=0} = A_{m32}^{i-1}|_{z=c_{i-1}}, \quad B_{m32}^i|_{z=0} = B_{m32}^{i-1}|_{z=c_{i-1}}, \quad \text{すなわち} \quad (A_{m32}^i \pm B_{m32}^i)|_{z=0} = (A_{m32}^{i-1} \pm B_{m32}^{i-1})|_{z=c_{i-1}} \quad (16)$$

$$A_{m32}^i - B_{m32}^i = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\left(\frac{1}{2\mu_i \alpha_i} \phi_i^{(k)}(z) + \frac{\mu_i \alpha_i}{2\mu_i (2\mu_i \alpha_i)} (\phi_i^{(k)}(z) - \psi_i^{(k)}(z)) \right) \right] d_{m3k} + \left(\frac{\lambda_i}{2\mu_i (1-\nu_i)} \phi_i^{(k)}(z) \right. \\ \left. - \frac{\mu_i \alpha_i}{2\mu_i (1-\nu_i)} (\phi_i^{(k)}(z) - \psi_i^{(k)}(z)) \right) D_{m3}^{i-1} \quad \text{ただし} \quad d_{m3k} = \frac{1}{F} (\gamma_{m15}^{i-1} - \delta_{m15}^{i-1}) \quad (17)$$

$$A_{m32}^i + B_{m32}^i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} \phi_i^{(k)}(z) \beta_{m3k} \quad \text{ただし} \quad \beta_{m3k} = \frac{1}{F} (\gamma_{m15}^{i-1} + \delta_{m15}^{i-1}) \quad (18)$$

層表面では、せん断力 τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$ が与えられ、 $\sigma_z = 0$ であるから全ての未知量を決定出来る。また、(17), (18) に示すように α , β を用いると σ_z は α , D で与えられるので、 n 層弾性体の場合 α , D に関する $2n-1$ 元、 β に関する $n-1$ 元の連立方程式を解くことになる。

4. 数値計算例

数値計算例として、2層体ととり下層は半無限体とした。

計算は半無限体、上層と下層の弾性係数を変化させたもの2種、に対して行ない、表面におけるせん断力は半径 a の円内に一様なせん断力 τ_0 を与える。すなわち

$$\tau_{\theta z} = \tau_0 \sin \theta, \quad \tau_{rz} = -\tau_0 \cos \theta \quad \therefore \gamma_{m15}^0 = 0, \quad \delta_{m15}^0 = -\frac{\pi a}{F} \tau_0 J_1(\xi a) \quad (19)$$

このとき、 $m=1$ のみとなる。計算に用いた数値は、 $C=2a$, $\mu=\lambda=0.4E$, $\mu_2=\lambda_2$ で $\mu_1/\mu_2=1.0, 0.01, 100.0$ である。計算結果の一部を図-3~5に示す。

$\mu_1/\mu_2=1.0$ の場合は半無限体となるが、これは牟岐の結果と一致する。このことは(1)~(9)式で(19)の条件を与えて $C \rightarrow \infty$ とすれば、式の上で牟岐の結果と一致することから当然のことである。

また(1)~(9)式は、 $m=0$ とすれば軸対称問題の解を与える。

参考文献

- 1) D. M. Burmister: The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems. I. Ⅱ J. Applied Physics, Vol. 16, 1945
- 2) 牟岐直樹: 表面にせん断荷重を受ける半無限弾性体の三次元応力問題, 社会学会論文集 第22巻 119号, 昭和31年7月
- 3) S. G. Nomachi: On One Method of Solving Stress Problems in Cylindrical Coordinates by Means of Finite Fourier-Hankel Transforms. I, Ⅱ.
- 4) 植下揚, G. G. S. マルコフ: 多層地盤における弾性変位について, 土木学会論文集 No. 144, Aug. 1967, the Memoirs of Muroran Inst. Tech.
- 5) 木村通: 二層地盤の力学性状に関する解析的研究, 土木学会論文集, No. 162, 1969-2. Vol. 3, No. 3, No. 4 1960-1961
- 6) K. G. Matsuzaki, S. G. Nomachi: On a 3-Dimensional Stress Analysis of an Annular Cylindrical Body by Means of Fourier-Hankel Transforms
- 7) H. BUEFLER: Elastisches Mehrschichtsystem unter asymmetrischer Belastung, Z.A.M.M. 54, 1974, L. Proc. 22th N. C. T. A. M

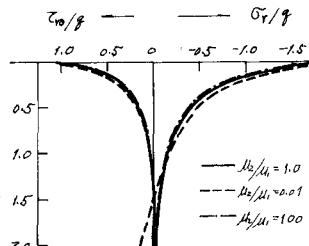


図-3. $r=a, \theta=0$ における $\sigma_r, \sigma_{\theta}$ の分布

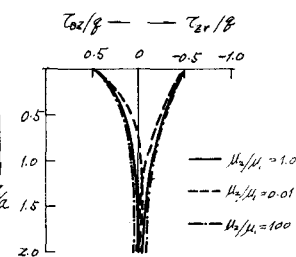


図-4. $r=a, \theta=0$ における $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ の2方向の分布

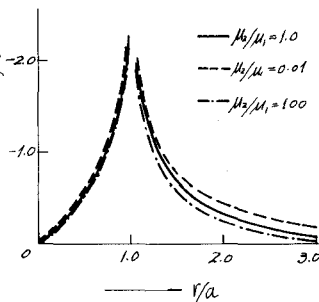


図-5. $z=0, \theta=0$ における σ_r の r 方向の分布