

北海道大学工学部 正員 能町純雄
 室蘭工業大学 正員 松岡健一
 室蘭工業大学 学生員 ○後藤和博

1. まえがき

本論は、周辺ヒンジ支持された厚肉円筒形シェルに、*sine* 荷重が分布した場合の変位と応力の解析を有限フーリエ・ハンケル変換による非軸対称3次元応力解析法^{(1),(2)}を用いて試みたものである。

2. 変位成分の一般式

座標軸を、シェルの長さ方向に z 、半径方向に r 、周方向に θ 軸とし、それぞれの変位を、 W , u , v 、また応力を、 σ_r , σ_θ , τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$ 、とすれば、周辺ヒンジで表面にせん断力のない場合、有限フーリエ・ハンケル変換によってえられる、変位は次の式で与えられる。

$$u = \frac{2}{\pi C} \sum_n \sum_m (A_{mnr} + B_{mnr}) \sin Nz \sin M\theta$$

$$v = \frac{2}{\pi C} \sum_n \sum_m (B_{mnr} - A_{mnr}) \sin Nz \cos M\theta$$

$$W = \frac{2}{\pi C} \sum_n \sum_m W_{mnr} \cos Nz \sin M\theta$$

$$A_{mnr} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu+\lambda}{2\mu\lambda N} \left\{ \chi_{mp}^{(k)} - \frac{1}{2} W_{mp}^{(k)} \right\} \beta_{mnk} + \frac{1}{N} \chi_{mp}^{(k)} \left\{ \frac{3(M+1)}{2} A_{mnk} + \frac{(M-1)}{2} B_{mnk} \right\} - \frac{2\mu+\lambda}{2\lambda N} \left\{ \chi_{mp}^{(k)} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} W_{mp}^{(k)} \right\} C_{mnk}$$

$$B_{mnr} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu+\lambda}{2\mu\lambda N} \left\{ \chi_{ms}^{(k)} - \frac{1}{2} W_{ms}^{(k)} \right\} \beta_{mnk} - \frac{1}{N} \chi_{ms}^{(k)} \left\{ \frac{M+1}{2} A_{mnk} + \frac{3(M-1)}{2} B_{mnk} \right\} - \frac{2\mu+\lambda}{2\lambda N} \left\{ \chi_{ms}^{(k)} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} W_{ms}^{(k)} \right\} C_{mnk}$$

$$W_{mnr} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda N} \left\{ G_{m}^{(k)} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu} F_{m}^{(k)} \right\} \beta_{mnk} - \frac{1}{N} G_{m}^{(k)} \left\{ (M+1) A_{mnk} - (M-1) B_{mnk} \right\} - \frac{2\mu+\lambda}{\lambda N} \left\{ G_{m}^{(k)} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} F_{m}^{(k)} \right\} C_{mnk}$$

$$\frac{\partial A_{mnr}}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu+\lambda}{\lambda N} \left\{ -\frac{(M+1)}{r} \chi_{mp}^{(k)} + \frac{(M+1)}{2r} W_{mp}^{(k)} - \frac{N}{2} F_{m}^{(k)} \right\} \beta_{mnk} + \left\{ G_{m}^{(k)} - \frac{(M+1)}{Nr} \chi_{mp}^{(k)} \right\} \left\{ \frac{3(M+1)}{2} A_{mnk} + \frac{(M-1)}{2} B_{mnk} \right\} - \frac{2\mu+\lambda}{2\lambda N} \left\{ -\frac{\lambda N}{2\mu+\lambda} G_{m}^{(k)} - \frac{(M+1)}{r} \chi_{mp}^{(k)} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (N F_{m}^{(k)} - \frac{(M+1)}{r} W_{mp}^{(k)}) \right\} C_{mnk}$$

$$\frac{\partial B_{mnr}}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu+\lambda}{2\mu\lambda N} \left\{ \frac{(M-1)}{r} \chi_{ms}^{(k)} - \frac{(M+1)}{2r} W_{ms}^{(k)} - \frac{N}{2} F_{m}^{(k)} \right\} \beta_{mnk} + \left\{ G_{m}^{(k)} + \frac{(M-1)}{Nr} \chi_{ms}^{(k)} \right\} \left\{ \frac{(M+1)}{2} A_{mnk} + \frac{3(M-1)}{2} B_{mnk} \right\} - \frac{2\mu+\lambda}{2\lambda N} \left\{ -\frac{\lambda N}{2\mu+\lambda} G_{m}^{(k)} + \frac{(M-1)}{r} \chi_{ms}^{(k)} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (N F_{m}^{(k)} + \frac{(M-1)}{r} W_{ms}^{(k)}) \right\} C_{mnk}$$

$$\frac{\partial W_{mnr}}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda N} \left\{ N \chi_{mp}^{(k)} + \frac{M}{r} G_{m}^{(k)} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu} (N W_{mp}^{(k)} + \frac{M}{r} F_{m}^{(k)}) \right\} \beta_{mnk} - \left(\chi_{mp}^{(k)} + \frac{M}{Nr} G_{m}^{(k)} \right) \left\{ (M+1) A_{mnk} - (M-1) B_{mnk} \right\} - \frac{2\mu+\lambda}{\lambda N} \left\{ N \chi_{mp}^{(k)} + \frac{M}{r} G_{m}^{(k)} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (N W_{mp}^{(k)} + \frac{M}{r} F_{m}^{(k)}) \right\} C_{mnk}$$

上式中 μ, λ は Lamé の弾性定数、 $N = \pi r_0 / C$ ($m=1$)、 $M = \pi r_0 / \rho$ ($m=1$) であり、シェルの外径を b_1 、内径を b_2 とすれば、

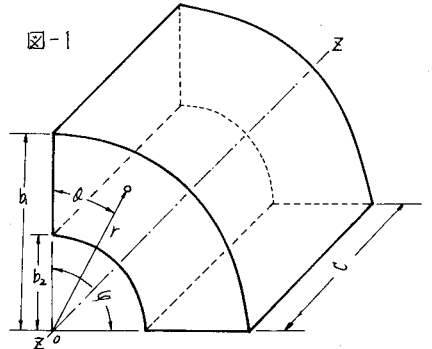
$$G_m^{(k)} = \frac{R_{m,0}^{(k)}(Nr)}{R_m^{(k)}(Nb_2)}, \quad \chi_{mp}^{(k)} = \frac{R_{m,m}^{(k)}(Nr)}{R_m^{(k)}(Nb_2)}, \quad \chi_{ms}^{(k)} = \frac{R_{m,m}^{(k)}(Nr)}{R_m^{(k)}(Nb_2)}, \quad R_{ij}^{(k)}(Nr) = I_i(Nr) K_j(Nb_{k-1}) - (-1)^{i+j} I_j(Nb_{k-1}) K_i(Nr)$$

$i, j \in \mathbb{Z}$ 、 $I(Nr)$, $K(Nr)$ は変形 Bessel 関数である。

$$F_m^{(k)} = \frac{N}{\{R_m^{(k)}(Nb_2)\}^2} \left[R_m^{(k)}(Nb_2) \left\{ r R_{m+1}^{(k)}(Nr) - b_{k-1} R_{m+1}^{(k)}(Nr) \right\} - R_m^{(k)}(Nr) \left\{ b_k R_{m+1}^{(k)}(Nb_2) - b_{k-1} R_{m+1}^{(k)}(Nb_2) \right\} \right]$$

$$W_{mp}^{(k)} = \frac{N}{\{R_m^{(k)}(Nb_2)\}^2} \left[R_m^{(k)}(Nb_2) \left\{ r R_{m+1}^{(k)}(Nr) - b_{k-1} R_{m+1}^{(k)}(Nr) \right\} - R_{m+1}^{(k)}(Nr) \left\{ b_k R_{m+1}^{(k)}(Nb_2) - b_{k-1} R_{m+1}^{(k)}(Nb_2) \right\} \right]$$

$$W_{ms}^{(k)} = \frac{N}{\{R_m^{(k)}(Nb_2)\}^2} \left[R_m^{(k)}(Nb_2) \left\{ r R_{m+1}^{(k)}(Nr) - b_{k-1} R_{m+1}^{(k)}(Nr) \right\} - R_{m+1}^{(k)}(Nr) \left\{ b_k R_{m+1}^{(k)}(Nb_2) - b_{k-1} R_{m+1}^{(k)}(Nb_2) \right\} \right]$$



B_{mnk} , A_{mnk} , C_{mnk} は境界の物理量で与えられる積分定数で境界条件を満足するように決定される。

3. 応力成分の一般式

$$\sigma_r = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n \left\{ \lambda \Delta + 2\mu \left(\frac{\partial A_{mnr}}{\partial r} + \frac{\partial B_{mnr}}{\partial r} \right) \right\} \sin Nz \sin Mo$$

$$\sigma_\theta = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n \left\{ \lambda \Delta + 2\mu \left\{ (1-M) \frac{A_{mnr}}{r} + (1+M) \frac{B_{mnr}}{r} \right\} \right\} \sin Nz \sin Mo$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n \left\{ \lambda \Delta + 2\mu N W_{mnr} \right\} \sin Nz \sin Mo$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n \mu \left\{ N(B_{mnr} - A_{mnr}) + \frac{M}{r} W_{mnr} \right\} \cos Nz \cos Mo$$

$$\tau_{rz} = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n \mu \left\{ N(A_{mnr} + B_{mnr}) + \frac{\partial W_{mnr}}{\partial r} \right\} \cos Nz \sin Mo$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2}{\pi C} \sum_m \sum_n \mu \left\{ (1+M) \frac{A_{mnr}}{r} - (1-M) \frac{B_{mnr}}{r} + \left(\frac{\partial B_{mnr}}{\partial r} - \frac{\partial A_{mnr}}{\partial r} \right) \right\} \sin Nz \cos Mo$$

ただし、 $\Delta = \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{1}{\lambda} G_{mn}^{(k)} B_{mnk} - \frac{2\mu}{\lambda} G_{mn}^{(k)} C_{mnk} \right\}$

4. 境界条件

ここで得られた結果は、 θ および z の境界条件はすでに満足しているので、 r における境界条件のみを考慮すれば良い。この境界条件は $r = b_k$ ($k=1, 2$) において

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$\tau_{rz} = 0$$

$$\sigma_r = p_k(\theta, z)$$

$p_k(\theta, z)$ は円筒面に作用する外力であるが

式(17)はすでに満足しており、式(19)から

$$B_{mnk} = \int_0^{2\pi} \int_0^C p_k(\theta, z) \sin Mo \sin Nz \, d\theta \, dz$$

また、式の誘導過程から

$$A_{mnr}|_{r=b_k} = b_k A_{mnk}$$

$$B_{mnr}|_{r=b_k} = b_k B_{mnk}$$

従って、式(18) および 式(20), (21) から

積分定数 A_{mnk} , B_{mnk} , C_{mnk} を決定する。

5. 数値計算例

解析の対称として、 $C = \pi/2$, $\varphi = \pi/2$, $\lambda = 0.0931677$

$\mu = 0.4347826$, $\nu = 0.15$, 外径 $b_1 = 1.5$, 内径 $b_2 = 1.0$ の

円筒形ソールを選んで計算を行った。計算結果を右図に示す。

ただし、作用させた外力は円筒面の両面に、 θ , z 方向に

それぞれ $\sin$ 分布で、円筒中心に向う力である。即ち

$$p_1(\theta, z) = -p \sin \pi\theta/\varphi \sin \pi z/C, \quad p_2(\theta, z) = p \sin \pi\theta/\varphi \sin \pi z/C.$$

*参考文献

- 1) S.G. Nomachi; On One Method of Solving Stress Problems in Cylindrical Coordinates by Means of Finite Fourier/Hankel Transforms.
- 2) 能町, 松岡; 円筒座標に関する非軸対称3次元応力解析について 第27回全国大会(1972) [Mem. of Musoran Institute of Tech. Vol. 3, No.3, No.4 (1960, 1961)]
- 3) Timoshenko and Woinowsky-Krieger; Theory of Plates and Shells McGraw-Hill
- 4) Timoshenko and Gere; Theory of Elastic Stability McGraw-Hill

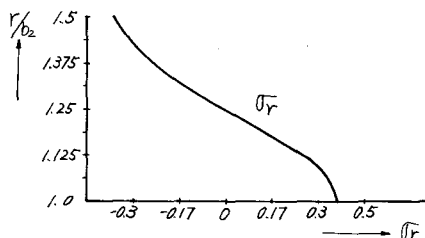


図-2 σ_r の分布

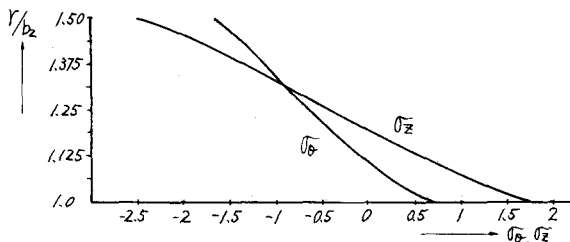


図-3 σ_θ, σ_z の分布

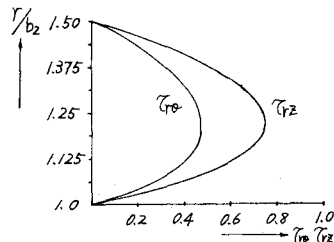


図-4 $\tau_{r\theta}, \tau_{rz}$ の分布