

I-5 矩形断面梁の棒状要素に於ける応力解析について

北工大工学部 能町 純雄
北見工業大学の大島 俊之
北海道開発局 吉田 敏一

1. 予えおき

ポリスム要素による解析は、これまでに O. C. Zienkiewicz ¹⁾ の著書に種々発表されているが、著者は断面方向に定積分変換を応用する目的で、別途ガウシアン要素による積分を用いて、ポリスム要素の断面内的一次変位に於ける変位関数を用いて、要素の稜の力と変位の関係式を求めた。

次にこれらの関係式により、稜のつりあいをとり、微分差分方程式を求め、軸方向にフーリエ変換、すなわち断面方向に積分変換を用いて解析を行なった。また、基本つりあ式で、分割長を無限小にすると、基本微分方程式に一致することを示しめられる。

2. ポリスム要素関係式の誘導

$$\sigma_x = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1) \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3) \quad \text{ここで } \mu, \lambda \text{ は } x-y \text{ 平面の定数}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4) \quad \dot{\sigma}_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{u} \quad \text{とする}$$

$$\int_0^{\lambda_2} \int_0^{\lambda_3} \dot{\sigma}_x dy dz d\zeta + \int_0^{\lambda_2} \int_0^{\lambda_3} \tau_{xy} dz d\zeta dy + \int_0^{\lambda_2} \int_0^{\lambda_3} \tau_{xz} dy d\zeta dy = \lambda_2 \int_0^{\lambda_3} \tau_{xy}|_{y=0} dz d\zeta + \lambda_3 \int_0^{\lambda_2} \tau_{xz}|_{z=0} dy d\zeta \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_A & u_B & u_C & u_D \\ v_A & v_B & v_C & v_D \\ w_A & w_B & w_C & w_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f^u(\zeta) f^u(\xi) \\ f^u(\zeta) f^v(\xi) \\ f^u(\zeta) f^w(\xi) \\ f^v(\zeta) f^u(\xi) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\text{ここで } f^u(x) = 1-x, \quad f^u(1-x) = x. \quad \text{また } \int_0^{\lambda_3} \int_0^{\lambda_2} \tau_{xy}|_{y=0} dz d\zeta = \int_0^{\lambda_3} (\lambda_3 - \zeta) \tau_{xy}|_{y=0} d\zeta \quad (7)$$

$$\int_0^{\lambda_2} \tau_{xz}|_{z=0} dy d\zeta = \int_0^{\lambda_2} (\lambda_2 - y) \tau_{xz}|_{z=0} dy d\zeta \quad (8) \quad (7), (8) \text{ 式を右辺に代入して } AB \text{ 面と作用する}$$

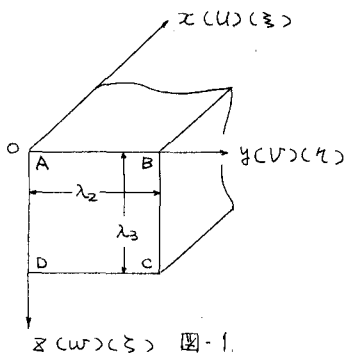
剪断応力によるA点に作用するE-X軸を意味する変位を、それぞれ $\lambda_3 T_{AD}$, $\lambda_2 T_{AB}$ とする。

$T_A = T_{AB}^A + T_{AD}^A$ とする。(6) 式を(5)式に代入して各項を計算し、整理すると

$$\begin{aligned} T_A &= \frac{(2\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3}{36} [4\ddot{u}_A + 2\ddot{u}_B + 2\ddot{u}_D + \ddot{u}_C] + \frac{\mu\lambda_3}{6\lambda_2} [2(u_B - u_A) + u_C - u_D] + \frac{\mu\lambda_2}{6\lambda_3} [2(u_D - u_A) + u_C - u_B] \\ &\quad + \frac{\lambda\lambda_3}{12} [2(\dot{v}_B - \dot{v}_A) + \dot{v}_C - \dot{v}_D] + \frac{\mu\lambda_3}{12} [2(\dot{v}_A + \dot{v}_B) + \dot{v}_C + \dot{v}_D] + \frac{\lambda\lambda_2}{12} [2(\dot{w}_D - \dot{w}_A) + \dot{w}_C - \dot{w}_B] \\ &\quad + \frac{\mu\lambda_2}{12} [2(\dot{w}_A + \dot{w}_D) + \dot{w}_B + \dot{w}_C] \quad (9) \quad \text{ここで } T_A \text{ は } A \text{ 点に作用する } x \text{ 方向の力である。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_A &= \frac{\mu\lambda_3}{12} [2(\dot{u}_B - \dot{u}_A) + \dot{u}_C - \dot{u}_D] + \frac{\mu\lambda_2\lambda_3}{36} [4\ddot{v}_A + 2\ddot{v}_B + 2\ddot{v}_D + \ddot{v}_C] + \frac{\lambda\lambda_3}{12} [2(\dot{u}_A + \dot{u}_B) + \dot{u}_C + \dot{u}_D] \\ &\quad + \frac{(2\mu + \lambda)\lambda_3}{6\lambda_2} [2(v_B - v_A) + v_C - v_D] + \frac{\lambda}{4} [w_D - w_A + w_C - w_B] + \frac{\mu\lambda_2}{6\lambda_3} [2(v_D - v_A) + v_C - v_B] \\ &\quad + \frac{\mu}{4} [w_B - w_A + w_C - w_D] \quad (10) \quad (9) \text{ 式と同様に } y, z \text{ 方向についても (10), (11) 式が得られる。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_A &= \frac{\mu\lambda_2\lambda_3}{36} [4\ddot{w}_A + 2\ddot{w}_B + 2\ddot{w}_D + \ddot{w}_C] + \frac{\mu\lambda_2}{12} [2(\dot{u}_D - \dot{u}_A) + \dot{u}_C - \dot{u}_B] + \frac{\lambda\lambda_2}{12} [2(\dot{u}_A + \dot{u}_D) + \dot{u}_C + \dot{u}_B] \\ &\quad + \frac{(2\mu + \lambda)\lambda_2}{6\lambda_3} [2(w_D - w_A) + w_C - w_B] + \frac{\lambda}{4} [v_B - v_A + v_C - v_D] + \frac{\mu\lambda_3}{6\lambda_2} [2(w_B - w_A) + w_C - w_D] \\ &\quad + \frac{\mu}{4} [v_D - v_A + v_C - v_B] \quad (11) \end{aligned}$$



3. 基本微分差分方程式の誘導

図-2の記号に従って、基本式を導くことができる。

$$\frac{(2\mu+\lambda)\lambda_2\lambda_3}{36} [\Delta_y^2 \Delta_z^2 \ddot{u}_{y-1,z-1} + 6\Delta_y^2 \ddot{u}_{y-1,z} + 6\Delta_z^2 \ddot{u}_{y,z-1} + 36 \ddot{u}_{y,z}]$$

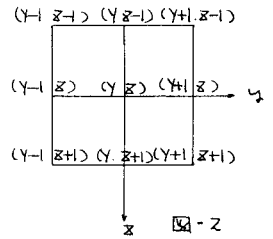
$$+ \frac{\mu\lambda_3}{6\lambda_2} [\Delta_y^2 \Delta_z^2 u_{y-1,z-1} + 6\Delta_y^2 u_{y-1,z}] + \frac{\mu\lambda_2}{6\lambda_3} [\Delta_y^2 \Delta_z^2 u_{y-1,z-1} + 6\Delta_z^2 u_{y,z-1}]$$

$$+ \frac{(\mu+\lambda)\lambda_3}{12} [\Delta_y \Delta_z^2 \dot{v}_{y-1,z-1} + 6\Delta_y \dot{v}_{y,z-1}] + \frac{(\mu+\lambda)\lambda_2}{12} [\Delta_y^2 \Delta_z \dot{w}_{y-1,z} + 6\Delta_z \dot{w}_{y,z}] = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\mu\lambda_2\lambda_3}{36} [\Delta_y^2 \Delta_z^2 \ddot{v}_{y-1,z-1} + 6\Delta_y^2 \ddot{v}_{y-1,z} + 6\Delta_z^2 \ddot{v}_{y,z-1} + 36 \ddot{v}_{y,z}] + \frac{\mu\lambda_3}{12} \Delta_y (\Delta_z^2 u_{y,z-1} + 6 \ddot{u}_{y,z})$$

$$+ \frac{(\mu+\lambda)}{4} \Delta_y \Delta_z \dot{w}_{y,z} + \frac{\lambda\lambda_3}{12} \Delta_y (\Delta_z^2 u_{y,z-1} + 6 \ddot{u}_{y,z}) + \frac{(2\mu+\lambda)\lambda_3}{6\lambda_2} [\Delta_y^2 \Delta_z^2 v_{y-1,z-1} + 6\Delta_y^2 v_{y-1,z}]$$

$$+ \frac{\mu\lambda_2}{6\lambda_3} [\Delta_y^2 \Delta_z^2 v_{y,z-1} + 6\Delta_z^2 v_{y,z-1}] = 0 \quad (13) \quad z \text{ 方向にも (13) 式と等価な式が得られる。}$$



また (12) 式を λ_2, λ_3 で割り、微分方程式に近づけると、 $(2\mu+\lambda)\ddot{u} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + (\mu+\lambda)(\frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}) = 0$

となる。(14)式に一致する。(13)にも同じような式が得られる。 $\Delta^2 f(x-1) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$, $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x-1)$

$$\text{次に } U = \frac{B}{l_j k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} S_i S_j S_k [U_{y,z}(\omega)], \quad V = \frac{B}{l_j k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} S_i R_j S_k [V_{y,z}(\omega)], \quad W = \frac{B}{l_j k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} S_i S_j R_k [W]$$

よって、 x 方向にはフーリエ変換、 y, z 方向には和分変換を行なう。

$$\text{左に示す } S_j [\Delta^2 f(x-1)] = -\sin \frac{j\pi}{J} \{ (-1)^j f(J) - f(0) \} - D_j S_j [f(\omega)] \quad \text{よって } D_j = 2(1 - \cos \frac{j\pi}{J})$$

4. 境界条件

数値計算例として、図-3の3次元状態を考え、構造、変形

の対称性を利用し、境界条件として、 $T_{00} = 0$ (14), $Y_{00} = 0$ (15)

$$Z_{00} = 0$$
 (16), $T_{0z}^A + T_{0z}^D = 0$ (17), $Y_{0z}^A + Y_{0z}^D = 0$ (18)

$$Z_{0z}^A + Z_{0z}^D = 0$$
 (19), $T_{0k} = 0$ (20), $Y_{0k} = 0$ (21), $Z_{0k} = 0$ (22)

$$T_{y0}^B + T_{y0}^A = 0$$
 (23), $Y_{y0}^B + Y_{y0}^A = 0$ (24), $Z_{y0}^B + Z_{y0}^A = 0$ (25)

$$T_{yk}^C + T_{yk}^D = 0$$
 (26), $Y_{yk}^C + Y_{yk}^D = 0$ (27), $Z_{yk}^C + Z_{yk}^D = 0$ (28)

より本条件式が得られる。

また断面の一部に鉄筋がある。弾性係数を選ぶ

とある様な計算の場合には、 x 方向に

$$\sum T + E_s A_s \ddot{u} = 0 \quad (29)$$

なる条件を立てるとして、同様の手法で解析することが出来る。ここで A_s は鉄筋の断面積。

5. 応えと変形

以上、Galerkinの手法から出発して、プリズム要素の関係式を誘導し、簡単な応用例について述べる。

＝9種の手法は、多層プレート構造、配管管と地盤の相互作用、ポリスチレンフォームの圧入による変形

の解析、厚板箱桁の解析に適用出来る。今後、台形、四角形、三角形要素の関係式も行う

11 たい。また、これと議論する必要がある。Zienkiewiczの手法など、他の手法と比較も

行なう必要がある。

参考文献

1) Zienkiewicz, Too: The Finite Prism in Analysis of Thick Simply Supported Bridge Boxes,

Proc. of I. C. E. September (1972) Vol 53, P.147.

2) Nomachi, Matsuoka: Applications of Finite Fourier Integration Transforms for

Structural Mechanics, Proc. of the 20th Jap. Nat. Cong. of Appl. Mech. (1970) III-3

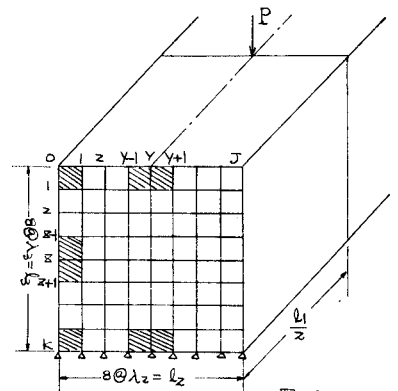


図-3.