

境界条件の変更(不動点より可動点)に関する解析手法

熊大 正員 平井一男
熊大 正員 水田洋司

はじめに.

ある大きな構造物で何度も境界条件をかえる場合、最初から解析をやり直す事は、やっかいであり手間を要する。ここで提案する方法は、そういう手間を省くために一部修正の考えに基づき、Müller-Breslau の原理を用いて境界を不動点から可動点に変更した系の解析を簡単に行なおうとするものである。

理論. Müller-Breslau の原理よりもとの系(図-1の System A)の不動点反力 R_0 とその点の変位 w_0 の関係を導き出し、この R_0 と等大逆方向の力を加えることにより、変更した系(図-1の System C)を作ることができる。

1. 静的問題. System A の関係式は.

$$\begin{Bmatrix} R_a \\ R_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ w_0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここに、 R_0 , w_0 は不動点から可動点にしようとしている点の反力と変位である。(1)式より不動点の反力影響線は

$$R_{0EI} = -f \cdot K_{21}^T \quad (2)$$

上式で、 $f = K_{11}^{-1}$, 添字 T は転置を示す。Müller-Breslau の原理によれば、(2)式は不動点 R_0 が $w_0 = 1$ だけ変化した時の弾性線に他ならない。すなわち.

$$w_{a1} = f \cdot K_{21}^T \quad (3)$$

従って、不動点を w_0 だけ変位させた時の不動点反力 R_0 は

$$R_0 = (K_{22} - K_{21} f \cdot K_{21}^T) \cdot w_0 \quad (4)$$

外力 R_a が作用した時の不動点反力 R_0 は、(1)式より

$$R_0 = K_{21} \cdot f \cdot R_a \quad (5)$$

図-1の System C に示すように、剛度 k の可動支承を持つ場合には

$$R_0 + R_0' = k \cdot w_0 \quad (6)$$

$$w_0 = -(K_{22} - K_{21} f \cdot K_{21}^T - k)^{-1} \cdot K_{21} f \cdot R_a$$

不動点の変形による w_0 の変形は

$$w_{a1} = f \cdot K_{21}^T \cdot w_0 = -f \cdot K_{21}^T (K_{22} - K_{21} f \cdot K_{21}^T - k)^{-1} \cdot K_{21} f \cdot R_a \quad (7)$$

従って、System C の変形は(変更点以外).

$$\begin{aligned} w_a &= w_{a1} + f \cdot R_a \\ &= \{I + f \cdot K_{21}^T (K_{22} - K_{21} f \cdot K_{21}^T - k)^{-1} \cdot K_{21}\} f \cdot R_a \end{aligned} \quad (8)$$

(6)式(8)式より、System A の解析結果を利用して、可動点に変更した System C の応答を求めることができる。

2. 固有値問題. 外力 R_a と可動点変位 w_0 の関係を表す運動方程式は、(6)式より

$$(K_{22} - \lambda M_{22} - K_{21} f_a K_{21}^T - k) w_0 + K_{21} f_a R_a = 0 \quad (9)$$

ただし、 f_a は動的撓性マトリックス、 $\lambda = \omega^2$, M_{22} は不動点の質量マトリックスである。自由振動時には、 $R_a = 0$ であり、その時(9)式が non-trivial な解をもつためには、

$$|K_{22} - \lambda M_{22} - K_{21} f_a K_{21}^T - k| = 0 \quad (10)$$

(10)式では f_a の全要素を使用する形になっているが、0要素を除いた縮約マトリックスを用いて表わすと、

$$|K_{22} - \lambda M_{22} - \bar{K}_{21} \bar{f}_a \bar{K}_{21}^T - k| = 0 \quad (11)$$

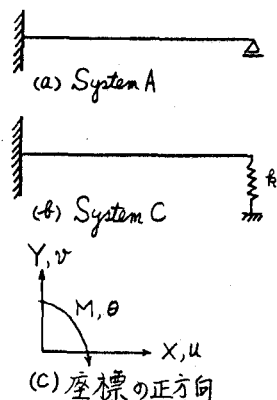


図-1. 系と座標

System Aの固有値と固有モードをそれぞれ ω_n, Φ_{nA} とすると、 Φ_n の要素は、

$$f_{dij} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \Phi_{nA}(x_i) \cdot \Phi_{nA}(x_j) \quad (12)$$

(11)式で求めた固有値 ω_m ($m=1,2,3,\dots$)を $\Phi_n=0$ とあいた9式に代入して確を比の形で求め、これを $\tilde{w}_{ma}$ とする。この $\tilde{w}_{ma}$ と ω_m を7式に代入することにより、固有モードを求めることができる。式で表わすと、

$$\Phi_m = [\tilde{w}_{ma}, \tilde{w}_{mb}] \quad (13)$$

$$\text{ここに、} \tilde{w}_{ma} = -f_{dam} K_{21}^{-1} \tilde{w}_{mb}, \quad f_{dmij} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \Phi_{nA}(x_i) \Phi_{nA}(x_j)$$

数値計算. 1. 図-2に示すSystem Aの解析結果を利用して、System Cの静的撓みを求める。本法で求めた値と直接解いて得た値を示している。

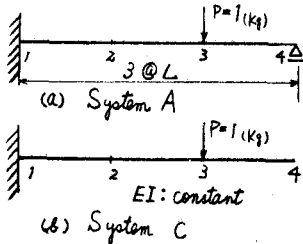


図-2. 梁

表-1. 解析結果 (L^3/EI)

		1	2	3	4
本法	v	0	-0.8332	-2.6664	-4.6661
	θL	0	1.4998	1.9998	1.9998
直接解	v	0	-0.8333	-2.6665	-4.6664
	θL	0	1.4999	1.9999	1.9999

2. 図-3に示す平面滑接トラスの固有値問題の解析を試みた。表-2にはトラスの諸元を、表-3には本法とヤコビ法で求めたそれぞれの固有振動数を示している。質量は各節点に集中するものとする。

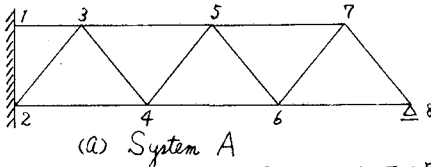


図-3 平面滑接トラス

表-2. トラスの諸元

節点	座標 x (cm)	座標 y (cm)	重量 (kg)	備考
1	0	866.025	1000	弾性係数 $= 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 断面積 $= 30 \text{ cm}^2$
2	0	0	2000	
3	500	866.025	1000	
4	1000	0	5000	
5	1500	866.025	2000	
6	2000	0	5000	
7	2500	866.025	1000	
8	3000	0	2000	

表-3 固有振動数 (rad/sec)

次数	1	2	3	4	5	6
本法	19.1400	58.1877	76.9517	113.3525	167.8044	203.5791
ヤコビ法	19.1379	58.1877	76.9516	113.3524	167.8044	203.5791
次数	7	8	9	10	11	12
本法	209.6116	254.2372	316.1051	342.2710	357.4082	480.6017
ヤコビ法	209.6116	254.2371	316.1050	342.2710	357.4082	480.6016

おわりに、可動点を不動点に変更する事は文献3)に述べられているように簡単にできるが、その逆は難しい。本法では、変更部分の小さなマトリックスを用いて簡単に不動点を可動点に変更することができる。また弾性支承をもつ構造物の解析ができるし、基礎が強制変位を受ける場合の応答も求めることができる。

(参考文献) 1. I. Hirai and T. Yoshimura and K. Takamura "On a Direct Eigenvalue Analysis for Locally Modified Structures" International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 6 1973

2. J. Sterling Kinney "Indeterminate structural analysis" Addison-Wesley Publishing Co 1957

3. W. Nowacki "Dynamics of Elastic Systems" Chapman and Hall LTD 1963