I-2　材料の強度を幾何学量として考慮した空間の構成について

東北大学　正員　岸野佑次

1. まえがき　近年，物体の変形状態を様々な幾何学量に対応させて表現を行なう方法が試みられている。これらの中，文献1)，2)は，物体内の応力場を空間的な量として表現したものであるが，本文は，以下に述べるような立場から，応力場の新しい幾何学的表現を試みたものである。

連続体は，分子論的な結合力により，形を保っている。また，粒状体のような材料では，周囲からの拘束力が結合力に相当する力である。このような力は，物体内部の各点における引張に対する強度を定め，また，この微視的引張強度は，一般に，材料内部で変動する量であると考えられる。この微視的強度を幾何学的基本量と考えることにより，一つの空間を導びくことが可能であり，変形に伴って生ずる基本量の変化量が応力に対応するものと考えることができる。以下，この応力空間を構成する方法について述べる。

2. 変形と歪空間　変形を受ける前の物体内にデカルト座標 x^κ （$\kappa=1,2,3$）を定め，対応する自然標構を $\underset{\circ}{\mathbf{e}}_\kappa$ （$\underset{\circ}{\mathbf{e}}_\kappa\cdot\underset{\circ}{\mathbf{e}}_\lambda=\delta_{\kappa\lambda}$）とする。また，変形を受けた後の物体内の各点の座標値を変形前の値 x^κ により表わし（ラグランジュ座標），対応する自然標構を $\mathbf{e}_\kappa$ とする。変形は，マトリックス T^λ_κ を用いて，

$$\mathbf{e}_\kappa = T^\lambda_\kappa\,\underset{\circ}{\mathbf{e}}_\lambda \tag{1}$$

により表わすことができる。変形前後の線素 $d\underset{\circ}{s}$，ds の二乗の差により，歪テンソル $\varepsilon_{\kappa\lambda}$ が定義される。

$$ds^2 - d\underset{\circ}{s}^2 = (g_{\kappa\lambda}-\delta_{\kappa\lambda})\,dx^\kappa dx^\lambda = 2\,\varepsilon_{\kappa\lambda}\,dx^\kappa dx^\lambda \tag{2}$$

ここに，$g_{\kappa\lambda}=\mathbf{e}_\kappa\cdot\mathbf{e}_\lambda$ は，変形後の歪空間における共変基本計量テンソルである。また，逆標構 $\mathbf{e}^\kappa$ は，$\mathbf{e}^\kappa\cdot\mathbf{e}_\lambda=\delta^\kappa_\lambda$，または，

$$\mathbf{e}^\kappa=\frac{1}{2\sqrt{g}}\,\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\,\mathbf{e}_\lambda\times\mathbf{e}_\mu\ ,\quad g=\det(g_{\kappa\lambda})=[\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3] \tag{3}$$

により与えられる。反変計量テンソルは $g^{\kappa\lambda}=\mathbf{e}^\kappa\cdot\mathbf{e}^\lambda$ と表わされる。また，T^λ_κ により，

$$\mathbf{e}^\kappa = \overset{-1}{T}{}^\kappa_\lambda\,\underset{\circ}{\mathbf{e}}^\lambda = \frac{1}{2}\,\overset{-1}{T}{}^\kappa_\lambda\,\epsilon^{\lambda\mu\nu}\,\underset{\circ}{\mathbf{e}}_\mu\times\underset{\circ}{\mathbf{e}}_\nu \tag{4}$$

となる。この式より，例えば，x^1 方向に引張が生じたとすれば，$\mathbf{e}^1$ は $\underset{\circ}{\mathbf{e}}^1$ より小さくなり，従って，g^{11} も $\underset{\circ}{g}^{11}$ より小さな値となることが分かる。

3. 微視的強度と応力空間　本文では，各点における微視的な強度が応力と同様なテンソル量であり，その主軸方向の成分は，その点での一軸的な引張強度を表わしていると仮定する。この様な微視的な強度は，均一な結晶構造より成る理想的な材料を除いては，巨視的な強度とは異なり，物体内部に分布していると考えられる。

いま，変形前におけるこの微視的強度の，材料内部のあらゆる点，あらゆる方向について平均した量を ρ とする。また，各点における微視的強度を表わすテンソルを $\rho\overset{*}{\underset{\circ}{g}}{}^{\kappa\lambda}$ で表わせば，$\overset{*}{\underset{\circ}{g}}{}^{\kappa\lambda}$ は，$\delta^{\kappa\lambda}$ を中心として変動する量となる。同様に，変形後の物体内での強度を $\rho\overset{*}{g}{}^{\kappa\lambda}$ で表わす。応力は微視的引張強度の低下に相当する量と考えられるので，応力テンソル $\sigma^{\kappa\lambda}$ は次式で与えられる。

$$\sigma^{\kappa\lambda} = 2\rho\,\overset{*}{\eta}{}^{\kappa\lambda} = \rho\,(\overset{*}{\underset{\circ}{g}}{}^{\kappa\lambda}-\overset{*}{g}{}^{\kappa\lambda}) \tag{5}$$

ここで，変形前の物体において，微視的な引張強度に充分余裕があり，変形後の物体のあらゆる点において，$\det(\overset{*}{g}{}^{\kappa\lambda})$ が正であるとすれば，$\overset{*}{\underset{\circ}{g}}{}^{\kappa\lambda}$，$\overset{*}{g}{}^{\kappa\lambda}$ を反変基本計量テンソルとしてもつ空間（以下，応力空間と呼

ぶ）を構成することができ，計量のみに着目すれば，これらの空間をリーマン空間とみなすことができる。変形後の応力空間のクリストッフェル記号は次式で与えられる。

$$\left\{{\kappa \atop \lambda\mu}\right\}^* = \frac{1}{2}\overset{*}{g}^{\kappa\nu}(\partial_\lambda \overset{*}{g}_{\nu\mu} + \partial_\mu \overset{*}{g}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \overset{*}{g}_{\lambda\mu}) \tag{6}$$

ここに，$\overset{*}{g}_{\kappa\lambda}$は応力空間の共変基本計量テンソルである。また，リーマン曲率テンソル

$$\overset{*}{R}{}^{\kappa}{}_{\cdot\lambda\mu\nu} = \partial_\nu\left\{{\kappa \atop \lambda\mu}\right\}^* - \partial_\mu\left\{{\kappa \atop \lambda\nu}\right\}^* - \left\{{\kappa \atop \mu\alpha}\right\}^*\left\{{\alpha \atop \lambda\nu}\right\}^* + \left\{{\kappa \atop \nu\alpha}\right\}^*\left\{{\alpha \atop \lambda\mu}\right\}^* \tag{7}$$

は，均質な材料が一様分布応力を受けたような特殊な場合を除き，0とはならない。

4. 歪空間と応力空間の対応　応力の発生に伴い，応力空間は，(1)式と同様な幾何学的変形を受ける。いま，例えば，x^1方向の微視的な強度$\overset{*}{g}^{11}$が減少したとすれば，2節の最後に述べたように，$\overset{*}{e}_1$の絶対値は増大する。即ち，伸び変形を生ずる。このように，応力空間においても，歪空間と同様な歪テンソルを考えることができ，これを$\overset{*}{\varepsilon}_{\kappa\lambda}$とおけば，次式が成立する。

$$2\overset{*}{\varepsilon}_{\kappa\lambda} = \overset{*}{g}_{\kappa\lambda} - \underset{0}{\overset{*}{g}}_{\kappa\lambda} \tag{8}$$

(5)，(8)式より，$\overset{*}{\varepsilon}_{\kappa\lambda}$，$\overset{*}{\eta}^{\kappa\lambda}$が微小の場合には，次式を得る。

$$\sigma^{\kappa\lambda} = 2\rho\,\overset{*}{\eta}^{\kappa\lambda} = 2\rho\,\underset{0}{\overset{*}{g}}{}^{\kappa\mu}\underset{0}{\overset{*}{g}}{}^{\lambda\nu}\overset{*}{\varepsilon}_{\mu\nu} \tag{9}$$

応力の平衡条件式を得るためには，変形後の歪空間における座標系での$\sigma^{\kappa\lambda}$に対する共変微分をとる必要があるが，いま，変形を微小とすれば，歪空間におけるクリストッフェル記号の値は微小であるので，平衡条件式はf^λを物体力とすれば，$\partial_\kappa\sigma^{\kappa\lambda} = f^\lambda$により与えられる。これに，(9)式を代入すれば，

$$\partial_\kappa \overset{*}{\eta}^{\kappa\lambda} = f^\lambda/2\rho \tag{10}$$

更に，変形が微小であることから，応力空間における変形前後のクリストッフェル記号の値の差が微小であるとし，また，計量テンソルの共変微分は0であることから，(10)式は，次式のように変形される。

$$\left\{{\kappa \atop \kappa\mu}\right\}^*\overset{*}{\eta}^{\mu\lambda} + \left\{{\lambda \atop \kappa\mu}\right\}^*\overset{*}{\eta}^{\kappa\mu} = -f^\lambda/2\rho \tag{11}$$

いま，材料を弾性体と考えれば，応力空間，歪空間は，次のフックの法則で関係づけられる。

$$\underset{0}{\overset{*}{g}}{}^{\mu\nu} - \overset{*}{g}^{\mu\nu} = \frac{2}{\rho}E^{\mu\nu\kappa\lambda}(g_{\kappa\lambda} - \underset{0}{g}_{\kappa\lambda}) \tag{12}$$

5. あとがき　本文では，微視的な引張強度を基本量と考えた応力空間の構成方法について述べた。3節にも述べたように，理想的な材料においては，巨視的な強度が微視的な引張強度に近いものとなるが，現実の材料の巨視的な強度は，理想的強度に比し，はるかに小さな値となるので，理論的破壊強度を求めるに当っては，グリフィス理論のように，材料の微視的な構造を想定する必要がある。また，グリフィス理論においては，均質材料中の単一の欠陥を基に理論づけを行なっているが，このようにして求めた破壊条件は局所的なものであると考えられるので，より巨視的な破壊条件を求めるには，例えば，本文におけるような微視的強度の分布を考える必要があると思われる。今後，更に，巨視的な強度との関係につき，考察を進めたいと考えている。

参考文献

1) Minagawa, S.: Riemannian Three-Dimensional Stress-Function Space, RAGG Memoirs 3, 1962, 69-81

2) Kondo, K.: A Constructive Approach to Elasticity and Newtonian Potential, RAAG Memoirs 4, 1968, 171-181