

1. まえがき

降伏条件のもつ統計的意味については、従来も論じられているが、^{1),2)} 本文は von Mises の条件や、その粒状体の場合への拡張と考えられる松岡³⁾ の条件について、一つの系統的考察を与えようとするものである。

2. von Mises の条件について

von Mises の条件は、主応力を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ として

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = k \quad (1)$$

と記されるが、この条件のもつ意味については、多くの解釈がなされている。⁴⁾ その中で、最も興味深いのは、8面体応力の概念であると思われる。周知のように、8面体応力の解釈は、図-1に示すような面 S (方向余弦 $l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$) 上のせん断応力 τ_{oct} が、

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2)$$

と表わされ、これがある値に達すると降伏がおこるとするものである。しかし、ここで何故、8面体面 S (主軸 I、II、III によって生ずる8個の象限に S と同様な面が8個あり、正8面体をつくる) を考えるかということについては、従来あまり考察がなされ

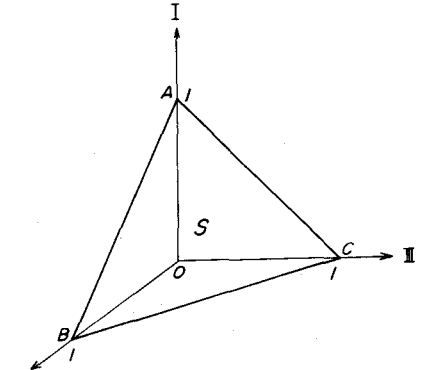


図-1

ていないようである。この点について、次のような統計論的考察を行うことができる。局所的なすべり面が、確率的にあらゆる方向に均等におこり得るものと考え、主軸座標による第1象限におけるその方向余弦 l, m, n (≥ 0) について考える。 l^2, m^2, n^2 の平均値を $\overline{l^2}, \overline{m^2}, \overline{n^2}$ と記せば、その均等性から、 $\overline{l^2} = \overline{m^2} = \overline{n^2}$ 、また、方向余弦について

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (3)$$

が成り立つから、

$$\overline{l^2} = \overline{m^2} = \overline{n^2} = \frac{1}{3} \quad (4)$$

を得る。これから求められる方向余弦は、図-1の8面体面 S のそれに他ならない。すなわち、von Mises の条件は次のように述べることができる。

「材料において、局所的すべりが、あらゆる方向に均等に起りうるものとする時、主軸座標による一つの象限についての平均的すべり面は、正8面体の一面となり、その面上のせん断応力(式(2))が、ある値に達すると降伏がおこる」。

上記は、Tresca の条件を統計的に修正した形となっていることに注意する。⁵⁾

3. 粒状体の場合

まず2次元の場合について考察する。 θ の変域を $0 \sim \frac{\pi}{2}$ とし、 $f(\theta)$ をウェイトを考慮せずに平均すれば、

$$\overline{f(\theta)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta \quad (5)$$

となる。 θ を局所的すべり面の法線方向を主軸 I から計った角度とし、 $f(\theta) = \cos^2 \theta$ とすれば、 $\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2}$ 、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ となり、これは最大せん断応力の方向と一致する (Tresca の条件)。

粒状体の場合、

$$P(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 \cos^2 \theta + \sigma_2^2 \sin^2 \theta} \quad (6)$$

という密度関数(図-2)を考え、すべり面の方向の $\cos^2 \theta$ に対する期待値 $\overline{\cos^2 \theta}$ を計算してみる。式(6)を仮定したのは小田、小西⁶⁾の理論及び実験を参考し、粒状体における内部接触面の方向の密度分布が主応力の差により異方的となり、これがすべり易さに影響することを考慮したのである。式(6)を用いれば、

$$\begin{aligned} \overline{\cos^2 \theta} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta P(\theta) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \sigma_1 \sigma_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta}{\sigma_1^2 \cos^2 \theta + \sigma_2^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \end{aligned} \quad (7)$$

同様に、

$$\overline{\sin^2 \theta} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad (7')$$

を得るが、これは Mohr - Coulomb の法則によるすべり面(図-3におけるAB)の方向余弦となっている。

3次元の場合については、3次元極座標を用いることになるが、計算がやゝ複雑となるので、こゝでは次のような幾何学的考察を行う。

図-4は、 $\sqrt{\sigma_1}$, $\sqrt{\sigma_2}$ を2軸とする楕円であるが、その接線の平均的方向を求めてみる。こゝで平均的という意味は、図示の θ を均等に変化するパラメーターとして、法線 n の方向余弦の $\overline{l^2}$, $\overline{m^2}$ の平均を第1象限について求めるのである。簡単な計算で、

$$l : m = \frac{l'}{\sqrt{\sigma_1}} : \frac{m'}{\sqrt{\sigma_2}} \quad (8)$$

θ の均等性から $\overline{l^2} = \overline{m^2}$ ($= \frac{1}{2}$) を用いれば、

$$\overline{l^2} : \overline{m^2} = \frac{1}{\sigma_1} : \frac{1}{\sigma_2} \quad (9)$$

$$\therefore \overline{l^2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad \overline{m^2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad (10)$$

となるが、これは式(7)の結果と同一である。この幾何学的

手法を3次元に拡張すれば、図-3に示すOA, OB, OCを3軸とする楕円を考え、上述の2次元の場合と同様のことを行えばよい。すなわち、第1象限内の楕円体について接平面を考え、その法線 n の方向余弦を l, m, n とすれば、

$$l : m : n = \frac{l'}{\sqrt{\sigma_1}} : \frac{m'}{\sqrt{\sigma_2}} : \frac{n'}{\sqrt{\sigma_3}} \quad (11)$$

こゝに、 l', m', n' は、図-3における図-4のOPに相当する動径の方向余弦で、その均等性から

$$\overline{l^2} = \overline{m^2} = \overline{n^2} \quad (= \frac{1}{3}) \quad (12)$$

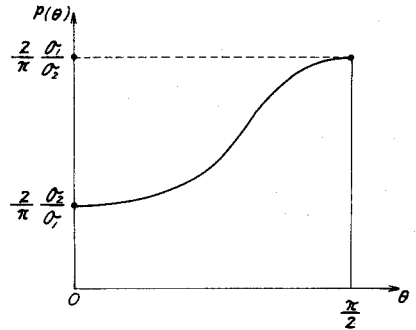


図-2

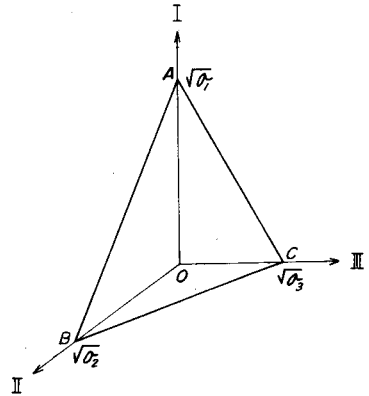


図-3

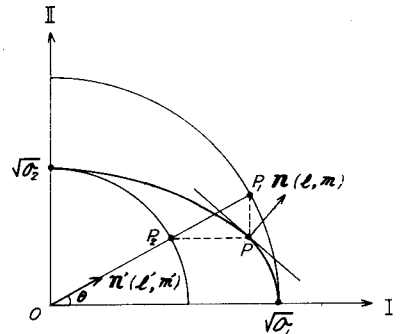


図-4

式(11)、(12)より

$$\overline{l^2} : \overline{m^2} : \overline{n^2} = \frac{1}{\sigma_1} : \frac{1}{\sigma_2} : \frac{1}{\sigma_3} \quad (13)$$

$$\therefore \sqrt{\overline{l^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2}}, \quad \sqrt{\overline{m^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_3 \sigma_1}{\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2}}, \quad \sqrt{\overline{n^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2}} \quad (14)$$

式(14)を方向余弦とする面は、松岡ら³⁾によって、土の力学的性質の解析に導入された空間モービライズド面(SMP)に一致する。松岡らは、この面上の τ/σ 、すなわち

$$\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)_{\text{SMP}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4 \sigma_1 \sigma_2} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4 \sigma_2 \sigma_3} + \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)^2}{4 \sigma_3 \sigma_1}} \quad (15)$$

が一定値に達すると降伏がおこるという降伏条件を提案しているが、これは前述した von Mises の条件と同様に次のように述べることができる。

「土のような粒状体において、局所的すべりの発生について、ある確率密度関数(式(6))、またはその3次元の拡張)を与えれば、主軸座標による第1象限についての平均的すべり面は、“空間モービライズド面”となりその面上の τ/σ (式(15))がある値に達すると降伏がおこる」。

これは、Mohr-Coulombの条件に統計的修正を与えた形となっていることに注意する。

図-5、図-6は、それぞれモール平面上における空間モービライズド面と8面体面の位置Pの作図を示したものである(図中 L_i は、円 $\sigma_i P P_i$ の中心)。図-5において、平均応力 $p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ は ∞ で示されているが、原点を0に移動し $p \rightarrow \infty$ の極限を考えれば、図-5は図-6になり、空間モービライズド面は8面体面に移行することがわかる。

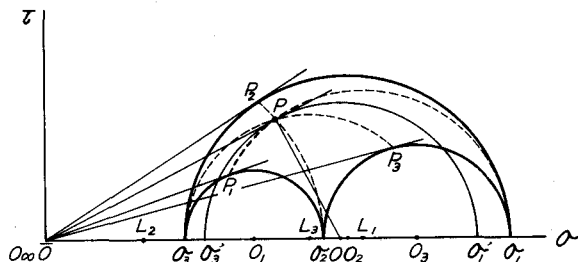


図-5

4.あとがき

降伏条件として von Mises および 松岡 の条件がある統計的意味をもつ面上での応力条件であることを説明し、その関連などについて述べた。降伏条件には、本質的に統計論的内容が含まれていると思われる、さらに多角的な考察が必要であると思われる。

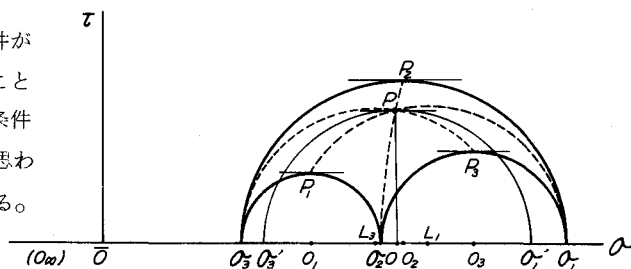


図-6

参考文献

- 1). Volkov, S.D.: Statistical Strength Theory, Gordon and Breach (1962).
- 2). Novozhilov, V.V.: Theory of Elasticity, Pergamon Press (1961). 78-81
- 3). 松岡 元・中井照夫: 多軸応力下の土の変形・強度特性, 京都大学防災研究所年報17号B (1974).
- 4). Paul, B.: Macroscopic Criteria for Plastic Flow and Brittle Fracture, Fracture Vol.2 (ed. by H.Liebowitz) (1968), 342-347
- 5). Kondo, K.: A Passage from Tresca's to von Mises' Yield Criterion, RAAG Research Note 3rd Ser. No.86 (1965)
- 6). 小西純一・小田 国寛: 粒状体のせん断における主応力軸の方向について, 第9回土質工学研究発表会講演集 (1974), 179-186