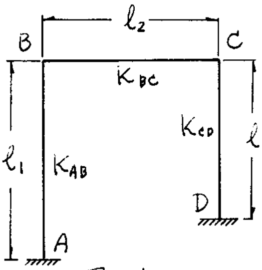
V-42　コンクリート構造門形ラーメンのクリープによる不静定力の一般式について

函館工業高等専門学校　正員　外崎　忍

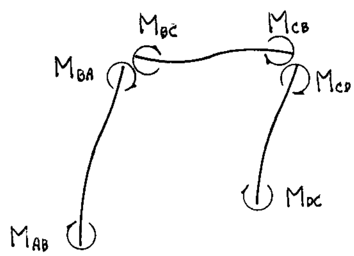
1）まえがき

コンクリート構造門形ラーメンでは、脚及び梁の施工時期が異なるとそれらのコンクリートのクリープ進行状態に差異を生じ不静定モーメントが発生する。本研究では撓角法を応用して一つの部材は定断面で、2本の脚の長さ、剛比、施工時期の任意な場合の不静定モーメントの解析を行い、その一般式を求めるものである。

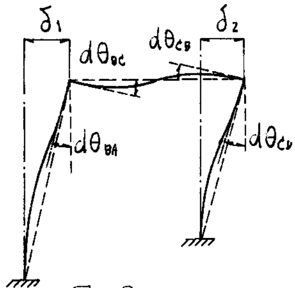
2）微分方程式の誘導



図－1



図－2



図－3

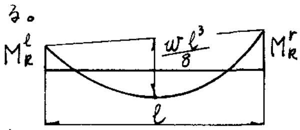
この解析には次の事項を仮定した。イ）コンクリートの弾性係数は一定、ロ）鉄筋やPC鋼の拘束応力の影響は無視、ハ）軸力の影響は無視、ニ）一つの部材は同時に施工される、ホ）クリープ関数は $\varphi_t = k(1-e^{-\lambda t})$ で、左右の脚及び梁のコンクリートの強度 σ が $\sigma = 0.75\times\sigma_{\infty}$ になった時点を $k=1$ とし、この時からラーメンが完成して載荷される時点までの時間差を t_1（左の脚）、t_2（梁）、t_3（右の脚）とする。

<u>固定ラーメンの場合</u>　図－3のように dt 時間内に変位したものとすれば節点の角変化量は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
d\theta_{AB} &= \frac{1}{6EK_{AB}}\left\{2dM_{AB} - dM_{BA} + 2M_{AB}e^{-\lambda t_1}d\varphi - M_{BA}e^{-\lambda t_1}d\varphi + \frac{6}{l_1}L_{AB}e^{-\lambda t_1}d\varphi\right\} + \frac{\delta_1}{l_1}\\
d\theta_{BA} &= \frac{1}{6EK_{BA}}\left\{2dM_{BA} - dM_{AB} + 2M_{BA}e^{-\lambda t_1}d\varphi - M_{AB}e^{-\lambda t_1}d\varphi + \frac{6}{l_1}L_{BA}e^{-\lambda t_1}d\varphi\right\} + \frac{\delta_1}{l_1}\\
d\theta_{BC} &= \frac{1}{6EK_{BC}}\left\{2dM_{BC} - dM_{CB} + 2M_{BC}e^{-\lambda t_2}d\varphi - M_{CB}e^{-\lambda t_2}d\varphi + \frac{6}{l_2}L_{BC}e^{-\lambda t_2}d\varphi\right\}\\
d\theta_{CB} &= \frac{1}{6EK_{CB}}\left\{2dM_{CB} - dM_{BC} + 2M_{CB}e^{-\lambda t_2}d\varphi - M_{BC}e^{-\lambda t_2}d\varphi + \frac{6}{l_2}L_{CB}e^{-\lambda t_2}d\varphi\right\}\\
d\theta_{CD} &= \frac{1}{6EK_{CD}}\left\{2dM_{CD} - dM_{DC} + 2M_{CD}e^{-\lambda t_3}d\varphi - M_{DC}e^{-\lambda t_3}d\varphi + \frac{6}{l_3}L_{CD}e^{-\lambda t_3}d\varphi\right\} + \frac{\delta_2}{l_3}\\
d\theta_{DC} &= \frac{1}{6EK_{DC}}\left\{2dM_{DC} - dM_{CD} + 2M_{DC}e^{-\lambda t_3}d\varphi - M_{CD}e^{-\lambda t_3}d\varphi + \frac{6}{l_3}L_{DC}e^{-\lambda t_3}d\varphi\right\} + \frac{\delta_2}{l_3}
\end{aligned}\right\} \text{----(1)}$$

こゝで、L_{ij} は $t=0$ における i～j 部材の i 点の（撓角×EI）を示し、これらは M_i、M_k 積分表で簡単に計算できる。符号は時計まわりを正とする。一例を挙げると次のようである。

左側 $\frac{wl^3}{24} - \frac{l}{6}(2M_k^l + M_k^r)$，右側 $-\left\{\frac{wl^3}{24} - \frac{l}{6}(2M_k^r + M_k^l)\right\}$



図－4

（1）式で $d\theta_{AB} = d\theta_{DC} = 0$、$d\theta_{BA} = d\theta_{BC}$、$d\theta_{CB} = d\theta_{CD}$、$K_{AB} = K_{CB}$、$K_{BC} = K_{CB}$、$K_{CD} = K_{DC}$、$M_{BA} = -M_{BC}$、$M_{CD} = -M_{CB}$、$\delta_1 = \delta_2$ であり，

$K_{BC}/K_{BA} = m_1$、$K_{CB}/K_{CD} = m_2$ とおく。

次にセン断方程式より　$M_{AB} - M_{BC} - M_{DC}\frac{l_1}{l_3} - M_{CB}\frac{l_1}{l_3} = 0$ ----------------（2）

(1),(2)より次のようにクリープにより発生する不静定モーメントM_{AB}、M_{BC}、M_{CB}、M_{DC}に関する連立微分方程式が得られる。

$$3\ell_1 m_1\frac{dM_{AB}}{d\varphi}+\ell_1(3m_1+2)\frac{dM_{BC}}{d\varphi}-\ell_1\frac{dM_{CB}}{d\varphi}+3\ell_1 m_1 e^{-xt_1}M_{AB}+\ell_1(3m_1 e^{-xt_1}+2e^{-xt_2})M_{BC}$$
$$-\ell_1 e^{-xt_2}M_{CB}+6m_1 e^{-xt_1}(L_{AB}-L_{BA})+6\frac{\ell_1}{\ell_2}e^{-xt_2}L_{BC}=0 \quad\text{-------------}(3,1)$$

$$\ell_1 m_1\frac{dM_{AB}}{d\varphi}+\{2(m_1+1)\ell_1+\ell_3\}\frac{dM_{BC}}{d\varphi}-\{2(m_2+1)\ell_3+\ell_1\}\frac{dM_{CB}}{d\varphi}-\ell_3 m_2\frac{dM_{DC}}{d\varphi}+\ell_1 m_1 e^{-xt_1}M_{AB}$$
$$+\{2\ell_1 m_1 e^{-xt_1}+(2\ell_1+\ell_3)e^{-xt_2}\}M_{BC}-\{2\ell_3 m_2 e^{-xt_3}+(2\ell_3+\ell_1)e^{-xt_2}\}M_{CB}-\ell_3 m_2 e^{-xt_3}M_{DC}$$
$$-6m_1 e^{-xt_1}L_{BA}+\frac{6}{\ell_2}(\ell_1 L_{BC}-\ell_3 L_{CB})e^{-xt_2}+6m_2 e^{-xt_3}L_{CD}=0 \quad\text{-----------}(3,2)$$

$$-\ell_3\frac{dM_{BC}}{d\varphi}+\ell_3(3m_2+2)\frac{dM_{CB}}{d\varphi}+3\ell_3 m_2\frac{dM_{DC}}{d\varphi}-\ell_3 e^{-xt_2}M_{BC}+\ell_3(3m_2 e^{-xt_3}+2e^{-xt_2})M_{CB}$$
$$+3\ell_3 m_2 e^{-xt_3}M_{DC}+6m_2 e^{-xt_3}(L_{DC}-L_{CD})+6\frac{\ell_3}{\ell_2}e^{-xt_2}L_{CB}=0 \quad\text{----------}(3,3)$$

$$\frac{dM_{AB}}{d\varphi}-\frac{dM_{BC}}{d\varphi}-\frac{\ell_1}{\ell_3}\frac{dM_{CB}}{d\varphi}+\frac{\ell_1}{\ell_3}\frac{dM_{DC}}{d\varphi}-M_{AB}-M_{BC}-\frac{\ell_1}{\ell_3}M_{CD}+\frac{\ell_1}{\ell_3}M_{DC}=0 \quad\text{----}(3,4)$$

<u>2鉸ラーメンの場合</u>　2鉸ラーメンの場合は(3,2),(3,4)式の $dM_{AB}/d\varphi$, $dM_{DC}/d\varphi$, M_{AB} , M_{DC} の項を除いて、この2式を連立微分方程式とすればよい。

<u>1脚固定1脚鉸の場合</u>　この場合は、例えば図−1のD点が鉸であるときは、(3,1),(3,2),(3,4)の $dM_{DC}/d\varphi$, M_{DC} の項を除いて、この3式を連立微分方程式とすればよい。

3) 微分方程式の解

微分方程式はマトリックスによって解くが $dM_{ij}/d\varphi$ の係数を f_{ij}、M_{ij} の係数を $-a'_{ij}$、定数項を $-b'_i$ とする。以下の式は固定の場合であるが、2鉸の場合は2次、1脚固定1脚鉸の場合は3次となる。

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34}\\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44}\end{bmatrix}=F,\quad \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14}\\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24}\\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34}\\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44}\end{bmatrix}=A',\quad \begin{bmatrix} b'_1\\ b'_2\\ b'_3\\ b'_4\end{bmatrix}=B'$$

ここで f_{14}、f_{31}、a'_{14}、a'_{31}、b'_4 は0、f_{41}、f_{42}、a'_{41}、a'_{42} は1が入る。

$A=F^{-1}A'$、$B=F^{-1}B'$ とすれば (3、1)〜(3、4) の一般解は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} M_{AB}\\ M_{BC}\\ M_{CB}\\ M_{DC}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34}\\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1\varphi} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_2\varphi} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_3\varphi} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4\varphi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix}$$

初期条件 $\varphi=0$ 、$M_{AB}=M_{BC}=M_{CB}=M_{DC}=0$、を代入して C_1、C_2、C_3、C_4 を決定すると解は次のようになる。但し λ_1、λ_2、λ_3、λ_4 は、A に関する固有値であり、r_{ij} は夫々の固有ベクトルである。

$$\begin{bmatrix} M_{AB}\\ M_{BC}\\ M_{CB}\\ M_{DC}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34}\\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1\varphi} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_2\varphi} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_3\varphi} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4\varphi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34}\\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix}$$